Mirko Navara, Petr Olšák

Základy fuzzy množin

Praha, 2001

Text ve formátech TeX (csplain), PostScript, `dvi`, PDF najdete na adrese
`ftp://math.feld.cvut.cz/pub/olsak/fuzzy/`.

Verze textu: 2. 5. 2001

Obsah

1. Základní pojmy

1.1. Základní pojmy z teorie množin

V této kapitole zopakujeme základní skutečnosti z teorie množin, které budeme později zobecňovat. Není zde místo na podrobnou výstavbu základů teorie množin, která bývá často nahrazována intuitivním chápáním pojmu množina. Z předchozích kursů byste měli vědět, že např. ke každé množině A existuje množina všech jejích podmnožin, budeme ji značit $\mathcal{P}(A)$. Zato však neexistuje množina všech množin, neboť takový pojem vede ke sporu. Těmto problémům se snadno vyhneme tak, že se omezíme na studium podmnožin jedné (libovolné, ale pevně dané) tzv. *univerzální množiny* (univerza), kterou budeme značit X.

Připomeňme některé pojmy:

Kardinalitou (též *mohutností*) konečné množiny rozumíme její počet prvků. Zobecnění na nekonečné množiny je obtížnější, ale pro tento kurs není podstatné.

Kartézský součin dvou množin A, B, značíme $A \times B$, je množina všech uspořádaných dvojic, v nichž první prvek je z první množiny, druhý z druhé, tedy

$$A \times B = \big\{(a, b) :\ a \in A, b \in B\big\}.$$

Množinové operace průnik a sjednocení můžeme snadno zavést pomocí výrokových operací konjunkce ($\wedge$) a disjunkce ($\vee$).

Průnik: $A \cap B = \{x :\ (x \in A) \wedge (x \in B)\}$.

Sjednocení: $A \cup B = \{x :\ (x \in A) \vee (x \in B)\}$.

Doplňkem množiny A, značíme $\overline{A}$, má být množina všech prvků, které do ní nepatří. Aby taková definice byla korektní, musíme se omezit na prvky univerzální množiny, tedy

$$\overline{A} = \{x :\ x \in X, x \notin A\}.$$

Inkluzi (tj. vlastnost „býti podmnožinou"), $A \subseteq B$, lze zavést několika ekvivalentními způsoby, např.

$$\begin{aligned}
&(1)\quad \forall x \in A :\ \ x \in B,\\
&(2)\quad \forall x \in X :\ \ (x \in A \Rightarrow x \in B),\\
&(3)\quad A \cap B = A,\\
&(4)\quad A \cup B = B.
\end{aligned}$$

Poslední dva vztahy charakterizují inkluzi pomocí množinových operací.

Povšimněme si ještě, že naopak lze všechny množinové operace zavést pomocí inkluze (a z ní přirozeně odvozených operací maxima a minima souboru množin):

$$\begin{aligned}
A \cap B &= \max\{C \subseteq X :\ C \subseteq A, C \subseteq B\},\\
A \cup B &= \min\{C \subseteq X :\ A \subseteq C, B \subseteq C\},\\
\overline{A} &= \max\{C \subseteq X :\ C \cap A = \emptyset\} = \min\{C \subseteq X :\ C \cup A = X\}.
\end{aligned}$$

Doplněk je také jednoznačně charakterizován vztahy

$$A \cap \overline{A} = \emptyset, \qquad A \cup \overline{A} = X.$$

Doplněk nedostačuje k určení inkluze, splňuje však následující ekvivalenci:

$$A \subseteq B \ \Leftrightarrow\ \overline{B} \subseteq \overline{A}.$$

1.2. Charakteristická funkce

Alternativně lze množinu A popsat její *charakteristickou funkcí* $\mu_A : X \to \{0,1\}$,

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{pro } x \in A, \\ 0 & \text{pro } x \notin A. \end{cases}$$

(Zde je opět důležitá univerzální množina X jako definiční obor charakteristické funkce.) Takto běžně reprezentujeme množiny na počítači, např. v Pascalu. Množina A je svou charakteristickou funkcí μ_A jednoznačně určena:

$$A = \{x \in X : \ \mu_A(x) = 1\} = \{x \in X : \ \mu_A(x) > 0\}.$$

I když charakteristická funkce nebývá prostá, budeme pro ni (podobně jako pro jiná zobrazení) používat značení pro inverzi μ_A^{-1}, která množině obrazů $M \subseteq \{0,1\}$ přiřadí množinu všech odpovídajících vzorů, tj.

$$\mu_A^{-1}(M) = \{x \in X : \ \mu_A(x) \in M\}.$$

S tímto značením lze psát

$$A = \mu_A^{-1}\big(\{1\}\big) = \mu_A^{-1}\big((0,1\rangle\big).$$

Je-li v argumentu μ_A^{-1} jednoprvková množina, často píšeme pouze tento prvek, tedy $\mu_A^{-1}(1)$ znamená $\mu_A^{-1}\big(\{1\}\big)$.

Inkluzi a množinové operace lze pomocí charakteristických funkcí vyjádřit následovně:

$$\begin{aligned} A \subseteq B &\Leftrightarrow \mu_A \le \mu_B, \\ \mu_{A\cap B}(x) &= \mu_A(x) \cdot \mu_B(x) = \min\big(\mu_A(x), \mu_B(x)\big) = \mu_A(x) \wedge \mu_B(x), \\ \mu_{A\cup B}(x) &= \max\big(\mu_A(x), \mu_B(x)\big) = \mu_A(x) \vee \mu_B(x), \\ \mu_{\overline{A}}(x) &= 1 - \mu_A(x) = \neg\mu_A(x). \end{aligned}$$

kde $\neg$ značí logickou negaci.

1.3. Základní pojmy teorie fuzzy množin

Zatímco zobecnění pojmu množiny v původním tvaru je těžko představitelné, charakteristickou funkci lze snadno zobecnit na funkci nabývající více (pravdivostních) hodnot. Zde se až na výjimky omezíme na případ, kdy množinou pravdivostních hodnot bude interval reálných čísel $\langle 0,1\rangle$.

Opět budeme předpokládat pevně zvolenou univerzální množinu X. *Fuzzy podmnožinou* A univerza X (stručně *fuzzy množinou*) budeme rozumět objekt popsaný (zobecněnou) charakteristickou funkcí

$$\mu_A : X \to \langle 0,1\rangle$$

(nazývanou též *funkce příslušnosti*).

Každá funkce z X do $\langle 0,1\rangle$ určuje jednoznačně nějakou fuzzy množinu. I když se v některých učebnicích důsledně rozlišují fuzzy množiny od jejich funkcí příslušnosti, zde budeme tyto pojmy ztotožňovat; zjednoduší se tím zápis a nehrozí nedorozumění. Podle této konvence tedy budeme fuzzy množinou rozumět jakoukoli funkci $A : X \to \langle 0,1\rangle$. Pro každý prvek $x \in X$ hodnota $A(x) \in \langle 0,1\rangle$ říká, do jaké míry je x prvkem fuzzy množiny A.

Zápis $x \in A$ nebudeme pro fuzzy množiny používat, protože ztrácí původní význam. Vyhradíme jej pouze pro „klasické“ množiny (které nejsou fuzzy); těm budeme pro odlišení říkat *ostré množiny* (angl. *crisp*). Naproti tomu zápis $A(x)$ budeme používat jak pro fuzzy množiny, tak pro ostré množiny jako speciální případ (opět využíváme dohodu o ztotožnění fuzzy množiny s její funkcí příslušnosti). Je-li tedy A ostrá množina a $x \in X$, pak $A(x)$ je pravdivostní hodnota výroku $x \in A$.

Všechny fuzzy podmnožiny univerza X tvoří množinu, kterou budeme značit $\mathcal{F}(X)$.

Abychom si zvykli na nový přístup, přepíšeme v této notaci vlastnosti charakteristických funkcí (tj. funkcí příslušnosti ostrých množin) z předchozí kapitoly; některé z nich se tím zjednoduší:

$$\begin{aligned} A \subseteq B &\Leftrightarrow A \le B, \\ (A \cap B)(x) &= A(x) \wedge B(x) = A(x) \cdot B(x) = \min\big(A(x), B(x)\big), \\ (A \cup B)(x) &= A(x) \vee B(x) = \max\big(A(x), B(x)\big), \\ \overline{A}(x) &= \neg A(x) = 1 - A(x). \end{aligned}$$

Zde A, B byly ostré množiny.

Později uvidíme, že tyto vztahy lze přirozeným způsobem použít i pro fuzzy množiny. Nejdříve však zavedeme několik základních pojmů pro libovolnou fuzzy množinu A na univerzu X.

Obor hodnot: $\mathrm{Range}(A) = \{\alpha \in \langle 0,1\rangle : (\exists x \in X : A(x) = \alpha)\}$

Výška: $h(A) = \sup \mathrm{Range}(A)$

Je-li fuzzy množina výšky 1, nazývá se *normální*; v opačném případě jí říkáme *subnormální*.

Nosič (angl. *support*) je ostrá množina

$$\mathrm{Supp}(A) = \{x \in X : A(x) > 0\}, \qquad \text{neboli} \qquad \mathrm{Supp}(A) = A^{-1}\big((0,1\rangle\big).$$

(Aby se nosič nepletl se supremem, píšeme zde velké „S“ a dvě „p“.)

Jádro (angl. *core*) je ostrá množina

$$\mathrm{core}(A) = \{x \in X : A(x) = 1\}, \qquad \text{tj.} \qquad \mathrm{core}(A) = A^{-1}(1).$$

Fuzzy množina se nazývá *konečná*, má-li konečný nosič. V tom případě definujeme tzv. *skalární kardinalitu* předpisem

$$\mathrm{card}(A) = \sum_{x \in X} A(x).$$

Je zřejmé, že stačí sčítat přes $x \in \mathrm{Supp}(A)$ a že pro konečné ostré množiny tento pojem splývá s klasickou kardinalitou.

1.4. Popis fuzzy množin pomocí řezů

Nyní ukážeme i jiný způsob určení fuzzy množiny než pomocí její funkce příslušnosti. Ten bude mnohde výhodný, proto bude účelné naučit se oba popisy navzájem převádět.

Definice 1.1. Nechť $A \in \mathcal{F}(X), \alpha \in \langle 0,1\rangle$. Pak *$\alpha$-hladina* (angl. *$\alpha$-level*) fuzzy množiny A je ostrá množina

$$A^{-1}(\alpha) = \{x \in X : A(x) = \alpha\}.$$

Systém řezů fuzzy množiny A je zobrazení

$$R_A : \langle 0,1\rangle \to \mathcal{P}(X),$$

které každému $\alpha \in \langle 0,1\rangle$ přiřazuje tzv. *α-řez* (angl. *α-cut*)

$$R_A(\alpha) = A^{-1}\big(\langle \alpha,1\rangle\big) = \{x \in X : A(x) \geq \alpha\}. \tag{1.1}$$

Použijeme-li v předchozím vztahu ostrou nerovnost, dostaneme *systém ostrých řezů* $S_A : \langle 0,1\rangle \to \mathcal{P}(X)$, kde *ostrý α-řez* je

$$S_A(\alpha) = A^{-1}\big((\alpha,1\rangle\big) = \{x \in X : A(x) > \alpha\}.$$

Poznámka 1.2. V literatuře se setkáváme s mnoha jinými způsoby značení α-řezu fuzzy množiny A, např. $[A]_\alpha$, ${}^\alpha A$, ${}_\alpha A$ atd.

Řezy a hladiny fuzzy množin mají následující vztah k dříve zavedeným pojmům:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Range}(A) &= \{\alpha \in \langle 0,1\rangle : A^{-1}(\alpha) \neq \emptyset\},\\
h(A) &= \sup\{\alpha \in \langle 0,1\rangle : R_A(\alpha) \neq \emptyset\},\\
\mathrm{Supp}(A) &= S_A(0),\\
\mathrm{core}(A) &= R_A(1).
\end{aligned}$$

Triviálně platí pro všechna $A \in \mathcal{F}(X)$:

$$R_A(0) = X, \qquad S_A(1) = \emptyset.$$

Věta 1.3 (o systému řezů). A. Nechť $M : \langle 0,1\rangle \to \mathcal{P}(X)$ je systém řezů fuzzy množiny $A \in \mathcal{F}(X)$, tj. $M = R_A$. Pak M splňuje podmínky

$$M(0) = X, \tag{R1}$$
$$0 \le \alpha < \beta \le 1 \Rightarrow M(\alpha) \supseteq M(\beta), \tag{R2}$$
$$0 < \beta \le 1 \Rightarrow M(\beta) = \bigcap_{\alpha<\beta} M(\alpha). \tag{R3}$$

(Průnik v (R3) je přes všechna $\alpha \in \langle 0,\beta)$.)

B. Naopak, každé zobrazení $M : \langle 0,1\rangle \to \mathcal{P}(X)$ splňující podmínky (R1), (R2), (R3) je systémem řezů nějaké fuzzy množiny $A \in \mathcal{F}(X)$, tj. $M = R_A$.

Důkaz.

A. (R1) : $M(0) = R_A(0) = X$ (0-řez).

(R2) : Je-li $x \in M(\beta) = R_A(\beta)$, znamená to, že $A(x) \ge \beta > \alpha$, tedy $x \in R_A(\alpha) = M(\alpha)$.

(R3) : Pro rovnost dvou množin je potřeba dokázat dvě inkluze.

Podle (R2) pro všechna $\alpha \in \langle 0,\beta)$ platí $M(\beta) \subseteq M(\alpha)$, proto $M(\beta) \subseteq \bigcap_{\alpha<\beta} M(\alpha)$.

Pro důkaz obrácené inkluze předpokládejme, že $x \in \bigcap_{\alpha<\beta} M(\alpha)$.

To znamená, že pro všechna $\alpha \in \langle 0,\beta)$ platí $A(x) \ge \alpha$, tedy $A(x) \ge \beta$, neboli $x \in R_A(\beta) = M(\beta)$.

B. Hledanou fuzzy množinu A lze definovat v každém bodě takto:

$$A(x) = \sup\{\alpha \in \langle 0,1\rangle :\ x \in M(\alpha)\}. \tag{1.5}$$

(Supremum existuje, protože podle (R1) je příslušná množina neprázdná.) Dokážeme, že systém řezů R_A je roven M. Důkaz opět rozložíme na dvě inkluze.

Pokud $x \in M(\beta)$, pak přímo z definice A vyplývá $A(x) \ge \beta$, tj. $x \in R_A(\beta)$.

Nechť $x \in R_A(\beta)$, tj. $A(x) = \sup\{\alpha \in \langle 0,1\rangle :\ x \in M(\alpha)\} \ge \beta$. Vzhledem k (R2) to znamená, že pro všechna $\alpha \in \langle 0,\beta)$ platí $x \in M(\alpha)$, a tedy s využitím (R3)

$$x \in \bigcap_{\alpha<\beta} M(\alpha) = M(\beta).$$

□

Poznámka 1.4. Kromě vztahu (R3) platí triviálně také

$$R_A(\beta) = \bigcap_{\alpha\le\beta} R_A(\alpha),$$
$$R_A(\beta) = \bigcup_{\alpha\ge\beta} R_A(\alpha),$$

ale neplatí

$$R_A(\beta) = \bigcup_{\alpha>\beta} R_A(\alpha).$$

Za protipříklad stačí vzít $X = \{x,y\}$, $A(x) = 1$, $A(y) = 0$. Pro $\beta = 0$ dostáváme $R_A(0) = X$, $\bigcup_{\alpha>0} R_A = \{x\}$.

Věta o reprezentaci pomocí řezů nám zajišťuje, že každá fuzzy množina je jednoznačně určena svým systémem řezů. Popisu fuzzy množiny pomocí systému řezů říkáme *horizontální reprezentace*, na rozdíl od *vertikální reprezentace* pomocí funkce příslušnosti. Vzájemný převod obou reprezentací zajišťují vztahy (1.1) a (1.5). Ty budeme potřebovat, neboť pro některé účely je jedna z reprezentací vhodnější než druhá. Převod z horizontální reprezentace na vertikální uvedeme ještě v jiném tvaru s využitím násobku fuzzy množiny skalárem.

Definice 1.5. Nechť $A \in \mathcal{F}(X)$, $\alpha \in \langle 0,1\rangle$. Definujeme $\alpha\, A \in \mathcal{F}(X)$ předpisem

$$(\alpha\, A)(x) = \alpha \cdot A(x).$$

Věta 1.6. Nechť $A \in \mathcal{F}(X)$. Pak

$$A(x) = \sup\bigl\{\alpha \in \langle 0,1\rangle :\ x \in R_A(\alpha)\bigr\}, \qquad A = \sup_{\alpha\in\langle 0,1\rangle} \alpha\, R_A(\alpha) = \sup_{\alpha\in\mathrm{Range}(A)} \alpha\, R_A(\alpha),$$

kde supremum v posledním vztahu počítáme po bodech, tj.

$$A(x) = \sup_{\alpha\in\langle 0,1\rangle} \bigl(\alpha\, R_A(\alpha)\bigr)(x).$$

(S tímto supremem se později setkáme jako se standardním fuzzy sjednocením.)

Důkaz. První vztah se vyskytl již v důkazu věty o reprezentaci řezů (1.5). Další jsou jen jeho ekvivalentní formulace. □

Jako příklad využití horizontální reprezentace uvažujme, jak reprezentovat v počítači fuzzy množinu reálných čísel. Vertikální reprezentace vyžaduje zadat reálnou funkci. Její hodnoty mohou být určeny s velkou přesností, ale ta nemusí být užitečná. Jelikož už sama vyjadřuje vágnost, vystačíme často s poměrně malým počtem stupňů příslušnosti. V horizontální reprezentaci pak stačí ke každému z nich určit příslušný řez. Často bývá řezem interval, k jehož určení stačí dvojice čísel. Později uvidíme, že tato reprezentace je vhodná i pro některé operace.

Příklad 1.7. Na univerzu $X = \{a,b,c,d\}$ je dána fuzzy množina $A = \bigl\{(a,0.3),(b,1),(c,0.5)\bigr\}$. Najděte její horizontální reprezentaci.

Řešení.

$$R_A(\alpha) = \begin{cases} X & \text{pro } \alpha = 0,\\ \{a,b,c\} & \text{pro } \alpha \in (0,0.3\rangle,\\ \{b,c\} & \text{pro } \alpha \in (0.3,0.5\rangle,\\ \{b\} & \text{pro } \alpha \in (0.5,1\rangle. \end{cases}$$

Příklad 1.8. Fuzzy množina A má horizontální reprezentaci

$$R_A(\alpha) = \begin{cases} \{a,b,c,d\} & \text{pro } \alpha \in \langle 0,1/3\rangle,\\ \{a,d\} & \text{pro } \alpha \in (1/3,1/2\rangle,\\ \{d\} & \text{pro } \alpha \in (1/2,2/3\rangle,\\ \emptyset & \text{pro } \alpha \in (2/3,1\rangle. \end{cases}$$

Najděte její vertikální reprezentaci.

Řešení.

$$\begin{aligned} & A(a) = \sup\bigl\{\alpha \in \langle 0,1\rangle :\ a \in R_A(\alpha)\bigr\} = \sup\langle 0,1/2\rangle = 1/2,\\ \text{podobně}\quad & A(b) = 1/3, \quad A(c) = 1/3, \quad A(d) = 2/3, \quad \text{tedy}\\ & A = \bigl\{(a,1/2),(b,1/3),(c,1/3),(d,2/3)\bigr\}. \end{aligned}$$

Příklad 1.9. Fuzzy množina A má horizontální reprezentaci

$$R_A(\alpha) = \begin{cases} \{a,b,c\} & \text{pro } \alpha = 0,\\ \{a\} & \text{pro } \alpha \in (0,1/2\rangle,\\ \{a,b\} & \text{jinak.} \end{cases}$$

Najděte její vertikální reprezentaci.

Řešení. Zadání není horizontální reprezentací žádné fuzzy množiny, protože není splněna podmínka (R2). Například $R_A(1/2) \not\subseteq R_A(1)$. Dostáváme $A(b) = \sup\bigl\{\alpha \in \langle 0,1\rangle :\ b \in R_A(\alpha)\bigr\} = \sup\bigl(\{0\} \cup (1/2,1\rangle\bigr) = 1$, ale $b \notin R_A(1/2)$.

Příklad 1.10. Fuzzy množina A má horizontální reprezentaci

$$R_A(\alpha) = \begin{cases} \{a, b\} & \text{pro } \alpha = 0, \\ \{a\} & \text{pro } \alpha \in (0, 1/2), \\ \emptyset & \text{jinak.} \end{cases}$$

Najděte její vertikální reprezentaci.

Řešení. Zadání není horizontální reprezentací žádné fuzzy množiny, protože není splněna podmínka (R3). Dostáváme $A(a) = \sup\{\alpha \in \langle 0, 1\rangle : \ a \in R_A(\alpha)\} = \sup\langle 0, 1/2) = 1/2$, ale $a \notin R_A(1/2)$.

Příklad 1.11. Na univerzu $X = \mathbf{R}$ je dána fuzzy množina A:

$$A(x) = \begin{cases} x & \text{pro } x \in \langle 0, 1\rangle, \\ 2 - x & \text{pro } x \in (1, 1.5\rangle, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Najděte její horizontální reprezentaci.

Řešení.

$$R_A(\alpha) = \begin{cases} \mathbf{R} & \text{pro } \alpha = 0, \\ \langle \alpha, 1.5\rangle & \text{pro } \alpha \in (0, 0.5\rangle, \\ \langle \alpha, 2 - \alpha\rangle & \text{pro } \alpha \in (0.5, 1\rangle. \end{cases}$$

Příklad 1.12. Je dána horizontální reprezentace fuzzy množiny A:

$$R_A(\alpha) = \begin{cases} \mathbf{R} & \text{pro } \alpha = 0, \\ \langle \alpha^2, 1) & \text{jinak.} \end{cases}$$

Najděte její vertikální reprezentaci.

Řešení.

$$A(X) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{pro } x \in (0, 1), \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Příklad 1.13. Je dána horizontální reprezentace fuzzy množiny A:

$$R_A(\alpha) = \begin{cases} \mathbf{R} & \text{pro } \alpha = 0, \\ (\alpha^2, 1) & \text{jinak.} \end{cases}$$

Najděte její vertikální reprezentaci.

Řešení. Zadání není horizontální reprezentací žádné fuzzy množiny, protože není splněna podmínka (R3). Dostáváme například $A(1/4) = \sup\{\alpha \in \langle 0, 1\rangle : \ 1/4 \in R_A(\alpha)\} = \sup\langle 0, 1/2) = 1/2$, ale $1/4 \notin R_A(1/2)$.

1.5. Fuzzy inkluze

Definice 1.14. Nechť A, $B \in \mathcal{F}(X)$. Říkáme, že A je *podmnožinou* B a píšeme $A \subseteq B$, jestliže platí $\forall x \in X : \ A(x) \leq B(x)$.

Protože takto je definována i nerovnost reálných funkcí, kterými fuzzy množiny jsou, můžeme ekvivalentně psát též $A \leq B$.

Poznámka 1.15. Nemůžeme použít zápis $\forall x \in A : \ x \in B$, neboť pro fuzzy množinu A nemáme dosud definován význam kvantifikátoru $\forall x \in A$.

Věta 1.16. Nechť A, $B \in \mathcal{F}(X)$. Pak $A \subseteq B$ právě tehdy, když

$$\forall \alpha \in \langle 0, 1\rangle : \ R_A(\alpha) \subseteq R_B(\alpha). \tag{1.6}$$

Důkaz. 1. Předpokládejme, že $A \subseteq B$, $x \in R_A(\alpha)$. Pak $\alpha \leq A(x) \leq B(x)$, tedy $x \in R_B(\alpha)$ a $R_A(\alpha) \subseteq R_B(\alpha)$.

2. Předpokládejme, že platí (1.6). Nechť $x \in X$. Podle věty 1.6 je

$$A(x) = \sup\{\alpha \in \langle 0, 1\rangle : \ x \in R_A(\alpha)\}.$$

Protože $\{\alpha \in \langle 0, 1\rangle : \ x \in R_A(\alpha)\} \subseteq \{\alpha \in \langle 0, 1\rangle : \ x \in R_B(\alpha)\}$, platí nerovnost $A(x) \leq \sup\{\alpha \in \langle 0, 1\rangle : x \in R_B(\alpha)\} = B(x)$. □

Díky této větě máme dvě ekvivalentní formulace fuzzy inkluze; jednu pro vertikální a jednu pro horizontální reprezentaci.

2. Operace s fuzzy množinami

2.1. Ostré množiny

Začneme přehledem situace pro ostré množiny a zaměříme se na vztah mezi množinovými a výrokovými operacemi. Výrokovými operacemi v tomto speciálním případě míníme operace Booleovy algebry, dané známými tabulkami hodnot.

množinové operace	výrokové operace	vztah
doplněk $\overline{} : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$	negace $\neg : \{0,1\} \to \{0,1\}$	$\overline{A} = \{x \in X : \neg(x \in A)\}$
průnik $\cap : \mathcal{P}(X)^2 \to \mathcal{P}(X)$	konjunkce $\wedge : \{0,1\}^2 \to \{0,1\}$	$A \cap B = \{x \in X : (x \in A) \wedge (x \in B)\}$
sjednocení $\cup : \mathcal{P}(X)^2 \to \mathcal{P}(X)$	disjunkce $\vee : \{0,1\}^2 \to \{0,1\}$	$A \cup B = \{x \in X : (x \in A) \vee (x \in B)\}$

Podle úmluvy o ztotožnění množin s jejich charakteristickými funkcemi lze předchozí vzorce psát:

$$\overline{A}(x) = \neg A(x), \qquad (A \cap B)(x) = A(x) \wedge B(x), \qquad (A \cup B)(x) = A(x) \vee B(x).$$

Důležitost uvedených vzorců tkví mj. v tom, že zatímco definiční obor množinových operací může být různý v závislosti na volbě univerzální množiny, výrokové operace zůstávají stejné. Stačí tedy znát výrokové operace, aby bylo možné zavést množinové operace na libovolném univerzu.

Dalším důsledkem je, že množinové operace splňují stejné vlastnosti jako odpovídající výrokové operace (např. komutativitu, asociativitu, distributivitu), jmenovitě zákony Booleovy algebry. Ty lze vyjádřit např. následovně (není to nejúspornější soustava axiomů, některé lze odvodit z ostatních):

involuce:	$\overline{\overline{A}} = A,$	
komutativita:	$A \cup B = B \cup A,$	$A \cap B = B \cap A,$
asociativita:	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C),$	$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C),$
distributivita:	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C),$	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C),$
idempotence:	$A \cup A = A,$	$A \cap A = A,$
absorpce:	$A \cup (A \cap B) = A,$	$A \cap (A \cup B) = A,$
absorpce s univerzem a $\emptyset$:	$A \cup X = X,$	$A \cap \emptyset = \emptyset,$
neutrální prvky:	$A \cup \emptyset = A,$	$A \cap X = A,$
zákon kontradikce:		$A \cap \overline{A} = \emptyset,$
zákon vyloučeného třetího:	$A \cup \overline{A} = X,$	
de Morganovy zákony:	$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B},$	$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}.$

2.2. Analogie pro operace s fuzzy množinami

Rovněž pro operace s fuzzy množinami budou základem operace fuzzy výrokového počtu, tedy operace s pravdivostními hodnotami, tentokrát z intervalu $\langle 0, 1\rangle$.

Poznámka 2.1. Vycházíme z předpokladu, že stupeň příslušnosti bodu $x \in X$ k výsledku operace závisí *jen* na jeho stupních příslušnosti k operandům a je jimi jednoznačně určen (tomu říkáme, že fuzzy logika je *funkcionální*).

V případě ostrých množin nebyl tento předpoklad vůbec překvapivý. V případě fuzzy množin je nutno tento princip zdůraznit, neboť mnohdy nebývá správně pochopen. Jeho první část říká, že výsledek je nezávislý na hodnotách příslušnosti v ostatních bodech.

Druhá část říká, že stupně příslušnosti bodu k operandům poskytují *dostatečnou* informaci pro určení stupně příslušnosti k výsledku. Tedy, že stupeň splnění konjunkce „je chladno a prší" je plně určen tím, nakolik je chladno a nakolik prší.

To je úplně jiná situace než u pravděpodobnostní neurčitosti. Kdybychom definovali *ostrá* kritéria pro jevy „je chladno" a „prší", mohli bychom stanovit (ostrou) pravdivostní hodnotu výroku „dnes je chadno a prší". Mohli bychom také hovořit o pravděpodobnosti jevů „zítra bude chladno a bude pršet". Ta *není* jednoznačně určena pravděpodobností výroků „zítra bude chladno" a „zítra bude pršet"; záleží zde navíc na závislosti zkoumaných jevů.

Je tedy třeba připomenout, že fuzzy neurčitost se liší od pravděpodobnostní mj. v tom, že je funkcionální.

Jelikož fuzzy množinové i výrokové operace vesměs zobecňují odpovídající klasické operace, budeme pro ně používat totéž značení: $\overline{}, \cap, \cup, \ldots, \neg, \wedge, \vee, \ldots$ a tutéž terminologii, pouze s přívlastkem „fuzzy“. Jak ovšem uvidíme, toto zobecnění lze zavést více způsoby, které budeme rozlišovat indexy, např. $\underset{S}{\neg}, \underset{S}{\cap}, \overset{L}{\cup}, \ldots$ Index nahradíme tečkou, chceme-li hovořit o nějaké (blíže nespecifikované) fuzzy operaci příslušného typu, např. $\underset{\cdot}{\cap}$ bude znamenat libovolný fuzzy průnik. Operandy bez indexů vyhradíme jen pro dva účely:

- operace klasické logiky a teorie množin,
- pro spojky použité v logice pro vytváření formulí, plnící tedy roli čistě syntaktickou.

Spojky $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$ vyhrazujeme pouze pro klasickou implikaci a ekvivalenci ostrých výroků.

2.3. Fuzzy negace

Definice 2.2. *Fuzzy negace* je unární operace $\underset{\cdot}{\neg} : \langle 0,1\rangle \to \langle 0,1\rangle$, splňující následující axiomy:

$$\alpha \le \beta \Rightarrow \underset{\cdot}{\neg}\beta \le \underset{\cdot}{\neg}\alpha, \tag{N1}$$

$$\underset{\cdot}{\neg}\underset{\cdot}{\neg}\alpha = \alpha. \tag{N2}$$

Podle (N1) je fuzzy negace nerostoucí, podle (N2) je *involutivní*.

Příklad 2.3. *Standardní fuzzy negace* $\underset{S}{\neg}$ je definována vztahem $\underset{S}{\neg}\alpha = 1 - \alpha$.

Z axiomů (N1), (N2) vyplývají mnohem přísnější podmínky:

Věta 2.4. Každá fuzzy negace $\underset{\cdot}{\neg}$ je spojitá, klesající, bijektivní a splňuje okrajové podmínky

$$\underset{\cdot}{\neg}1 = 0, \qquad \underset{\cdot}{\neg}0 = 1. \tag{N0}$$

Její graf je symetrický podle osy 1. a 3. kvadrantu, tj. $\underset{\cdot}{\neg}^{-1} = \underset{\cdot}{\neg}$ (neboli $\underset{\cdot}{\neg}$ je sama k sobě inverzní).

Důsledek 2.5. Pro každou fuzzy negaci $\underset{\cdot}{\neg}$ existuje právě jedna hodnota $e \in (0,1)$, pro kterou $\underset{\cdot}{\neg}e = e$. Nazýváme ji *rovnovážnou hodnotou* (angl. *equilibrium*).

Důkaz. Funkce $f(\beta) = \underset{\cdot}{\neg}\beta - \beta$ splňuje $f(0) = 1$, $f(1) = -1$. Protože je spojitá, má podle věty o střední hodnotě v intervalu $(0,1)$ nulové místo, které je rovnovážnou hodnotou. Jednoznačnost plyne z toho, že f je klesající. □

Věta 2.6 (o reprezentaci fuzzy negací). A. Nechť $i : \langle 0,1\rangle \to \langle 0,1\rangle$ je rostoucí bijekce. Pak funkce

$$\underset{i}{\neg} = i^{-1} \circ \underset{S}{\neg} \circ i, \quad \text{tj.} \quad \underset{i}{\neg}\alpha = i^{-1}\big(\underset{S}{\neg} i(\alpha)\big)$$

je fuzzy negace.

B. Naopak, každá fuzzy negace $\underset{\cdot}{\neg}$ je uvedeného tvaru pro nějakou rostoucí bijekci i; ta se nazývá *generátor fuzzy negace* $\underset{\cdot}{\neg}$.

Důkaz. (Dle [Nguyen-Walker].) **A.** (N1): Nechť $\alpha, \beta \in \langle 0,1\rangle$, $\alpha \le \beta$. Jelikož i, i^{-1} uspořádání zachovávají a $\underset{S}{\neg}$ obrací, dostáváme postupně

$$i(\alpha) \le i(\beta), \qquad \underset{S}{\neg} i(\alpha) \ge \underset{S}{\neg} i(\beta), \qquad i^{-1}\big(\underset{S}{\neg} i(\alpha)\big) \ge i^{-1}\big(\underset{S}{\neg} i(\beta)\big),$$

tedy $\underset{i}{\neg}\alpha \ge \underset{i}{\neg}\beta$.

(N2): $\underset{i}{\neg} \circ \underset{i}{\neg} = i^{-1} \circ \underset{S}{\neg} \circ i \circ i^{-1} \circ \underset{S}{\neg} \circ i = i^{-1} \circ \underset{S}{\neg} \circ \underset{S}{\neg} \circ i = i^{-1} \circ i = \mathrm{id}$, kde id je identita na $\langle 0,1\rangle$.

B. Definujeme zobrazení i předpisem

$$i(\alpha) = \frac{\alpha + \underset{S}{\neg}\underset{\cdot}{\neg}\alpha}{2}$$

a dokážeme, že je generátorem fuzzy negace $\underset{\cdot}{\neg}$. Je zřejmé, že i je rostoucí, spojitá a splňuje $i(0) = 0$, $i(1) = 1$. Je to tedy bijekce na $\langle 0,1\rangle$. Dále platí

$$\underset{S}{\neg} i(\alpha) = 1 - \frac{\alpha + \underset{S}{\neg}\underset{\cdot}{\neg}\alpha}{2} = \frac{1 - \alpha + 1 - \underset{S}{\neg}\underset{\cdot}{\neg}\alpha}{2} = \frac{\underset{S}{\neg}\alpha + \underset{S}{\neg}\underset{S}{\neg}\underset{\cdot}{\neg}\alpha}{2} = \frac{\underset{S}{\neg}\alpha + \underset{\cdot}{\neg}\alpha}{2} = \frac{\underset{S}{\neg}\underset{\cdot}{\neg}\underset{\cdot}{\neg}\alpha + \underset{\cdot}{\neg}\alpha}{2} = i(\underset{\cdot}{\neg}\alpha).$$

Tím jsme dokázali, že $\underset{S}{\neg} \circ i = i \circ \underset{\cdot}{\neg}$, neboli $i^{-1} \circ \underset{S}{\neg} \circ i = \underset{\cdot}{\neg}$. □

Poznámka 2.7. Pro rozlišení od jiných reprezentací se někdy tomuto typu generátoru fuzzy negace říká *rostoucí generátor*.

Poznámka 2.8. Rostoucí generátor fuzzy negace není jednoznačně určen. V předchozím důkazu jsme zkonstruovali jeden z možných rostoucích generátorů. Zcela jinou konstrukci lze najít v [Klir], je však mnohem komplikovanější.

Věta o reprezentaci fuzzy negací má několik důsledků. Rostoucí bijekci i lze interpretovat jako změnu měřítka na intervalu $\langle 0,1\rangle$; mění se označení pravdivostních hodnot, ale zůstává zachováno jejich uspořádání.

Podle reprezentační věty lze libovolnou fuzzy negaci dostat ze standardní. To ovšem neznamená, že by standardní negace měla nějaké výsadní postavení; naopak na jejím místě bylo možno použít libovolnou jinou fuzzy negaci, věta platí i pro ni.

Různé fuzzy negace se mohou jevit odlišně z hlediska uživatele, který jimi chce popsat vágnost informací, ale z matematického hlediska mezi nimi není (zatím) žádný podstatný rozdíl. Další text tedy neztratí příliš na obecnosti, když se v něm omezíme na jedinou – standardní – fuzzy negaci.

Poznámka 2.9. Někdy se uvažuje (a jako fuzzy negace označuje) *zobecněná fuzzy negace*, což je operace $\underset{\cdot}{\neg} : \langle 0,1\rangle \to \langle 0,1\rangle$ splňující pouze (N0) a (N1). Ta nemusí být involutivní ani spojitá. V tom případě se fuzzy negaci v našem smyslu (splňující (N1),(N2)) říká silná fuzzy negace.

Příklad 2.10. *Gödelova zobecněná fuzzy negace*:

$$\underset{G}{\neg}\alpha = \begin{cases} 1 & \text{pro } \alpha = 0, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Definice 2.11. *Fuzzy doplněk* je operace na fuzzy množinách definovaná pomocí fuzzy negace:

$$\overline{A}^{\cdot}(X) = \underset{\cdot}{\neg}\big(A(x)\big).$$

Přitom $\overline{}^{\cdot}$ znamená obecný fuzzy doplněk. Jednotlivé typy budeme rozlišovat stejnými indexy, jako u fuzzy negací. Například $\overline{}^{S}$ je standardní fuzzy doplněk odpovídající standardní fuzzy negaci $\underset{S}{\neg}$.

2.4. Fuzzy konjunkce (trojúhelníkové normy)

Definice 2.12. *Fuzzy konjunkce*, (*trojúhelníková norma*, *t-norma*, angl. *triangular norm*) je binární operace $\underset{\cdot}{\wedge} : \langle 0,1\rangle^2 \to \langle 0,1\rangle$, splňující následující axiomy pro všechna $\alpha, \beta, \gamma \in \langle 0,1\rangle$:

$$\begin{aligned} \alpha \underset{\cdot}{\wedge} \beta &= \beta \underset{\cdot}{\wedge} \alpha && \text{(komutativita)} && \text{(T1)} \\ \alpha \underset{\cdot}{\wedge} (\beta \underset{\cdot}{\wedge} \gamma) &= (\alpha \underset{\cdot}{\wedge} \beta) \underset{\cdot}{\wedge} \gamma && \text{(asociativita)} && \text{(T2)} \\ \beta \le \gamma &\Rightarrow \alpha \underset{\cdot}{\wedge} \beta \le \alpha \underset{\cdot}{\wedge} \gamma && \text{(monotonie)} && \text{(T3)} \\ \alpha \underset{\cdot}{\wedge} 1 &= \alpha && \text{(okrajová podmínka)} && \text{(T4)} \end{aligned}$$

Příklad 2.13.

- *Standardní* fuzzy konjunkce (*min*, *Gödelova*, *Zadehova* ...):

$$\alpha \underset{S}{\wedge} \beta = \min(\alpha, \beta).$$

- *Lukasiewiczova* fuzzy konjunkce (*Gilesova*, angl. *bold*, *bounded difference*, ...):

$$\alpha \underset{L}{\wedge} \beta = \begin{cases} \alpha + \beta - 1 & \text{pro } \alpha + \beta - 1 > 0, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

- *Součinová* fuzzy konjunkce (*produktová*, *pravděpodobnostní*, angl. *algebraic product*, ...):

$$\alpha \underset{P}{\wedge} \beta = \alpha \cdot \beta.$$

- *Drastická* fuzzy konjunkce (*slabá*, angl. *weak*, ...):

$$\alpha \underset{D}{\wedge} \beta = \begin{cases} \alpha & \text{pro } \beta = 1, \\ \beta & \text{pro } \alpha = 1, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Věta 2.14. Pro každou fuzzy konjunkci $\underset{\cdot}{\wedge}$ a $\alpha \in \langle 0,1\rangle$ platí $\alpha \underset{\cdot}{\wedge} 0 = 0$.

Důkaz. Podle (T3) a (T4) platí: $\alpha \underset{\cdot}{\wedge} 0 \overset{(T3)}{\leq} 1 \underset{\cdot}{\wedge} 0 \overset{(T4)}{=} 0$. □

Mezi fuzzy konjunkcemi můžeme uvažovat stejné uspořádání, jaké známe u funkcí, tj. $\underset{1}{\wedge} \leq \underset{2}{\wedge}$, jestliže $\forall \alpha, \beta \in \langle 0,1\rangle : \ \alpha \underset{1}{\wedge} \beta \leq \alpha \underset{2}{\wedge} \beta$.

Věta 2.15. Mezi všemi fuzzy konjunkcemi je standardní největší a drastická nejmenší, tj. pro libovolnou fuzzy konjunkci $\underset{\cdot}{\wedge}$ platí

$$\forall \alpha, \beta \in \langle 0,1\rangle : \ \alpha \underset{D}{\wedge} \beta \leq \alpha \underset{\cdot}{\wedge} \beta \leq \alpha \underset{S}{\wedge} \beta.$$

Důkaz. Je-li $\alpha = 1$ nebo $\beta = 1$, pak podmínka (T4) dává stejný výsledek pro všechny fuzzy konjunkce. Předpokládejme (bez újmy na obecnosti) $\alpha \leq \beta < 1$. Pak

$$\alpha \underset{D}{\wedge} \beta = 0 \leq \alpha \underset{\cdot}{\wedge} \beta \leq \alpha \underset{\cdot}{\wedge} 1 = \alpha = \alpha \underset{S}{\wedge} \beta.$$ □

Věta 2.16. Standardní fuzzy konjunkce je jediná, která splňuje $\alpha \underset{S}{\wedge} \alpha = \alpha$ pro všechna $\alpha \in \langle 0,1\rangle$. (Této vlastnosti binárních operací říkáme *idempotence*.)

Důkaz. Nechť $\underset{\cdot}{\wedge}$ je idempotentní fuzzy konjunkce. Dokážeme, že je standardní. Předpokládejme $\alpha, \beta \in \langle 0,1\rangle$, $\alpha \leq \beta$. Pak

$$\alpha = \alpha \underset{\cdot}{\wedge} \alpha \overset{(T3)}{\leq} \alpha \underset{\cdot}{\wedge} \beta \overset{(T3)}{\leq} \alpha \underset{\cdot}{\wedge} 1 \overset{(T4)}{=} \alpha,$$

tedy $\alpha \underset{\cdot}{\wedge} \beta = \alpha = \alpha \underset{S}{\wedge} \beta$. Pro $\alpha > \beta$ zaměníme α, β a stejným postupem dostaneme $\alpha \underset{\cdot}{\wedge} \beta = \beta = \alpha \underset{S}{\wedge} \beta$. □

Dále se zaměříme především na *spojité* fuzzy konjunkce. Z fuzzy konjunkcí z příkladu 2.13 pouze drastická je nespojitá.

Definice 2.17. Nechť $\underset{\cdot}{\wedge}$ je spojitá fuzzy konjunkce. Řekneme, že $\underset{\cdot}{\wedge}$ je

- *archimedovská* (angl. *archimedean*), jestliže

$$\forall \alpha \in (0,1) : \ \alpha \underset{\cdot}{\wedge} \alpha < \alpha \tag{TA}$$

- *striktní*, (angl. *strict*), jestliže

$$\forall \alpha \in (0,1\rangle \ \forall \beta, \gamma \in \langle 0,1\rangle : \ \beta < \gamma \Rightarrow \alpha \underset{\cdot}{\wedge} \beta < \alpha \underset{\cdot}{\wedge} \gamma \tag{T3+}$$

- *nilpotentní* (angl. *nilpotent*), jestliže je archimedovská a není striktní.

Poznámka 2.18. V některých pramenech jsou jako archimedovské označovány všechny – i nespojité – fuzzy konjunkce, které splňují (TA). Je nutno se vždy přesvědčit, v jakém významu autor tento termín používá.

Příklad 2.19. Součinová fuzzy konjunkce je striktní, Łukasiewiczova je nilpotentní, standardní a drastická nejsou archimedovské (standardní nesplňuje (TA), drastická není spojitá). V dalším uvidíme, že tyto příklady jsou typické a v jistém smyslu univerzální.

Poznámka 2.20. Podmínka (T3+) je silnější než (TA); stačí v ní dosadit $\beta := \alpha$, $\gamma := 1$. Tedy každá striktní fuzzy konjunkce je archimedovská; archimedovské fuzzy konjunkce se dělí na dvě disjunktní podtřídy, striktní a nilpotentní.

Definice 2.21. Chceme-li aplikovat fuzzy konjunkci $\underset{\cdot}{\wedge}$ na n argumentů α_i, použijeme zápis

$$\underset{\cdot}{\bigwedge}_{k=1}^{n} \alpha_k = \alpha_1 \underset{\cdot}{\wedge} \cdots \underset{\cdot}{\wedge} \alpha_n.$$

Věta 2.22. Nechť $\underset{\cdot}{\wedge}$ je archimedovská fuzzy konjunkce. Pak pro každé $\alpha \in (0,1)$ a $\varepsilon > 0$ existuje $n \in \mathbf{N}$ takové, že

$$\underset{\cdot}{\bigwedge}_{k=1}^{n} \alpha < \varepsilon$$

Pro striktní fuzzy konjunkce nelze předchozí větu zesílit, pro nilpotentní ano:

Věta 2.23. Nechť $\dot\wedge$ je nilpotentní fuzzy konjunkce. Pak pro každé $\alpha \in (0,1)$ existuje $n \in \mathbf{N}$ takové, že

$$\dot{\bigwedge}_{k=1}^{n} \alpha = 0$$

Věta 2.24 (o reprezentaci striktních fuzzy konjunkcí). A. Nechť $i : \langle 0,1\rangle \to \langle 0,1\rangle$ je rostoucí bijekce. Pak operace $\underset{i}{\wedge} : \langle 0,1\rangle^2 \to \langle 0,1\rangle$, definovaná vztahem

$$\alpha \underset{i}{\wedge} \beta = i^{-1}\big(i(\alpha) \cdot i(\beta)\big),$$

je striktní fuzzy konjunkce.

B. Naopak, každá striktní fuzzy konjunkce $\dot\wedge$ je uvedeného tvaru pro nějakou rostoucí bijekci i, kterou nazýváme *multiplikativní generátor*.

Poznámka 2.25. Nechť i je multiplikativní generátor fuzzy konjunkce $\underset{i}{\wedge}$. Definujeme funkci $h : \langle 0,1\rangle \to \langle 0,\infty\rangle$ předpisem

$$h(\alpha) = -\ln i(\alpha) \qquad (\text{klademe } \ln 0 = -\infty).$$

Pak inverzní funkce je $h^{-1}(t) = i^{-1}(e^{-t})$ a pro všechna $\alpha, \beta \in \langle 0,1\rangle$ platí

$$\alpha \underset{i}{\wedge} \beta = h^{-1}\big(h(\alpha) + h(\beta)\big),$$

neboť $h^{-1}\big(h(\alpha)+h(\beta)\big) = i^{-1}\left(e^{-\left(-\ln i(\alpha) - \ln i(\beta)\right)}\right) = i^{-1}\left(e^{\ln i(\alpha)\cdot i(\beta)}\right) = i^{-1}\big(i(\alpha)\cdot i(\beta)\big) = \alpha \underset{i}{\wedge} \beta$.

Funkci h nazýváme *aditivní generátor* fuzzy konjunkce $\underset{i}{\wedge}$, neboť nám dovoluje vyjádřit tuto operaci pomocí součtu reálných čísel. Na rozdíl od multiplikativního generátoru, aditivní generátor je *klesající* funkce a jeho obor hodnot je nekonečný interval $\langle 0,\infty\rangle$. Proto zde budeme přednostně pracovat s multiplikativním generátorem, na rozdíl od např. [Schweizer-Sklar].

Věta 2.26 (o reprezentaci nilpotentních fuzzy konjunkcí). A. Nechť $i : \langle 0,1\rangle \to \langle 0,1\rangle$ je rostoucí bijekce. Pak operace $\underset{i}{\wedge} : \langle 0,1\rangle^2 \to \langle 0,1\rangle$, definovaná vztahem

$$\alpha \underset{i}{\wedge} \beta = i^{-1}\big(i(\alpha) \underset{L}{\wedge} i(\beta)\big),$$

je nilpotentní fuzzy konjunkce.

B. Naopak, každá nilpotentní fuzzy konjunkce $\dot\wedge$ je uvedeného tvaru pro nějakou rostoucí bijekci i, kterou nazýváme *Lukasiewiczův generátor*.

Definice 2.27. *Fuzzy průnik* je operace na fuzzy množinách definovaná pomocí fuzzy konjunkce:

$$(A \mathbin{\dot\cap} B)(x) = A(x) \mathbin{\dot\wedge} B(x).$$

Přitom $\dot\cap$ znamená obecný fuzzy průnik. Jednotlivé typy budeme rozlišovat stejnými indexy jako u fuzzy konjunkcí.

2.5. Fuzzy disjunkce (trojúhelníkové konormy)

Definice 2.28. *Fuzzy disjunkce*, (*trojúhelníková konorma*, *t-konorma*, angl. *triangular conorm*) je binární operace $\dot\vee : \langle 0,1\rangle^2 \to \langle 0,1\rangle$, splňující následující axiomy pro všechna $\alpha, \beta, \gamma \in \langle 0,1\rangle$:

$$\begin{array}{rll}
\alpha \mathbin{\dot\vee} \beta = \beta \mathbin{\dot\vee} \alpha & \text{(komutativita)} & \text{(S1)}\\
\alpha \mathbin{\dot\vee} (\beta \mathbin{\dot\vee} \gamma) = (\alpha \mathbin{\dot\vee} \beta) \mathbin{\dot\vee} \gamma & \text{(asociativita)} & \text{(S2)}\\
\beta \le \gamma \Rightarrow \alpha \mathbin{\dot\vee} \beta \le \alpha \mathbin{\dot\vee} \gamma & \text{(monotonie)} & \text{(S3)}\\
\alpha \mathbin{\dot\vee} 0 = \alpha & \text{(okrajová podmínka)} & \text{(S4)}
\end{array}$$

Příklad 2.29.

- *Standardní* fuzzy disjunkce (*max*, *Gödelova*, *Zadehova* ...):

$$\alpha \overset{S}{\vee} \beta = \max(\alpha, \beta).$$

- *Lukasiewiczova* fuzzy disjunkce (*Gilesova*, angl. *bold*, *bounded sum*, ...):

$$\alpha \overset{L}{\vee} \beta = \begin{cases} \alpha + \beta & \text{pro } \alpha + \beta < 1, \\ 1 & \text{jinak.} \end{cases}$$

- *Součinová* fuzzy disjunkce (*produktová*, *pravděpodobnostní*, ...):

$$\alpha \overset{P}{\vee} \beta = \alpha + \beta - \alpha \cdot \beta.$$

- *Drastická* fuzzy disjunkce (*slabá*, angl. *weak*, ...):

$$\alpha \overset{D}{\vee} \beta = \begin{cases} \alpha & \text{pro } \beta = 0, \\ \beta & \text{pro } \alpha = 0, \\ 1 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Věta 2.30. Pro každou fuzzy disjunkci $\dot\vee$ a $\alpha \in \langle 0, 1 \rangle$ platí $\alpha \dot\vee 1 = 1$.

Důkaz. Podle (S3) a (S4) platí: $\alpha \dot\vee 1 \overset{\text{(S3)}}{\geq} 0 \dot\vee 1 \overset{\text{(S4)}}{=} 1.$ □

Mezi fuzzy disjunkcemi uvažujeme stejné uspořádání jako u funkcí.

Věta 2.31. Mezi všemi fuzzy disjunkcemi je standardní nejmenší a drastická největší, tj. pro libovolnou fuzzy disjunkci $\dot\vee$ platí

$$\forall \alpha, \beta \in \langle 0, 1 \rangle : \ \alpha \overset{S}{\vee} \beta \leq \alpha \dot\vee \beta \leq \alpha \overset{D}{\vee} \beta.$$

Důkaz. Je-li $\alpha = 0$ nebo $\beta = 0$, pak podmínka (S4) dává stejný výsledek pro všechny fuzzy disjunkce. Předpokládejme (bez újmy na obecnosti) $0 < \alpha \leq \beta$. Pak

$$\alpha \overset{S}{\vee} \beta = \beta = 0 \dot\vee \beta \leq \alpha \dot\vee \beta \leq 1 = \alpha \overset{D}{\vee} \beta.$$

□

Věta 2.32. Standardní fuzzy disjunkce je jediná, která je idempotentní, tj. $\alpha \overset{S}{\vee} \alpha = \alpha$ pro všechna $\alpha \in \langle 0, 1 \rangle$.

Věta 2.33. Nechť $\underset{\cdot}{\neg}$ je fuzzy negace.

A. Je-li $\underset{\cdot}{\wedge}$ fuzzy konjunkce, pak de Morganova formule $\alpha \dot\vee \beta = \underset{\cdot}{\neg}(\underset{\cdot}{\neg}\, \alpha \underset{\cdot}{\wedge} \underset{\cdot}{\neg}\, \beta)$ definuje fuzzy disjunkci $\dot\vee$ *duální* k $\underset{\cdot}{\wedge}$ vzhledem k $\underset{\cdot}{\neg}$.

B. Je-li $\dot\vee$ fuzzy disjunkce, pak de Morganova formule $\alpha \underset{\cdot}{\wedge} \beta = \underset{\cdot}{\neg}(\underset{\cdot}{\neg}\, \alpha \dot\vee \underset{\cdot}{\neg}\, \beta)$ definuje fuzzy konjunkci $\underset{\cdot}{\wedge}$ *duální* k $\dot\vee$ vzhledem k $\underset{\cdot}{\neg}$.

Poznámka 2.34. Pokud u duality neuvedeme, vzhledem k jaké negaci je chápána, pak automaticky předpokládáme standardní fuzzy negaci.

Příklad 2.35.

- Łukasiewiczovy operace $\underset{L}{\wedge}, \overset{L}{\vee}$ jsou duální vzhledem ke standardní negaci.
- Součinové operace $\underset{P}{\wedge}, \overset{P}{\vee}$ jsou duální vzhledem ke standardní negaci.
- Standardní operace $\underset{S}{\wedge}, \overset{S}{\vee}$ jsou duální vzhledem k jakékoli fuzzy negaci.
- Drastické operace $\underset{D}{\wedge}, \overset{D}{\vee}$ jsou duální vzhledem k jakékoli fuzzy negaci.

Dále se zaměříme především na *spojité* fuzzy disjunkce. Z fuzzy disjunkcí z příkladu 2.29 pouze drastická je nespojitá.

Definice 2.36. Nechť $\dot\vee$ je spojitá fuzzy disjunkce. Řekneme, že $\dot\vee$ je

- *archimedovská* (angl. *archimedean*), jestliže

$$\forall \alpha \in (0,1): \ \alpha \mathbin{\dot\vee} \alpha > \alpha \tag{SA}$$

- *striktní*, (angl. *strict*), jestliže

$$\forall \alpha \in \langle 0,1) \ \forall \beta, \gamma \in \langle 0,1\rangle: \ \beta < \gamma \Rightarrow \alpha \mathbin{\dot\vee} \beta < \alpha \mathbin{\dot\vee} \gamma \tag{S3+}$$

- *nilpotentní* (angl. *nilpotent*), jestliže je archimedovská a není striktní.

Poznámka 2.37. V některých pramenech jsou jako archimedovské označovány všechny – i nespojité – fuzzy disjunkce, které splňují (SA).

Příklad 2.38. Součinová fuzzy disjunkce je striktní, Łukasiewiczova je nilpotentní, standardní a drastická nejsou archimedovské (standardní nesplňuje (SA), drastická není spojitá).

Poznámka 2.39. Podmínka (S3+) je silnější než (SA); stačí v ní dosadit $\gamma := \alpha$, $\beta := 0$.

Definice 2.40. Chceme-li aplikovat fuzzy disjunkci $\dot\vee$ na n argumentů α_i, použijeme zápis

$$\dot{\bigvee}_{k=1}^{n} \alpha_k = \alpha_1 \mathbin{\dot\vee} \cdots \mathbin{\dot\vee} \alpha_n.$$

Věta 2.41. Nechť $\dot\vee$ je archimedovská fuzzy disjunkce. Pak pro každé $\alpha \in (0,1)$ a $\varepsilon > 0$ existuje $n \in \mathbf{N}$ takové, že

$$\dot{\bigvee}_{k=1}^{n} \alpha > 1 - \varepsilon$$

Pro striktní fuzzy disjunkce nelze předchozí větu zesílit, pro nilpotentní ano:

Věta 2.42. Nechť $\dot\vee$ je nilpotentní fuzzy disjunkce. Pak pro každé $\alpha \in (0,1)$ existuje $n \in \mathbf{N}$ takové, že

$$\dot{\bigvee}_{k=1}^{n} \alpha = 1$$

Věta 2.43 (o reprezentaci striktních fuzzy disjunkcí). A. Nechť $i : \langle 0,1\rangle \to \langle 0,1\rangle$ je rostoucí bijekce. Pak operace $\overset{i}{\dot\vee} : \langle 0,1\rangle^2 \to \langle 0,1\rangle$, definovaná vztahem

$$\alpha \overset{i}{\dot\vee} \beta = i^{-1}\big(i(\alpha) \overset{P}{\dot\vee} i(\beta)\big),$$

je striktní fuzzy disjunkce.

B. Naopak, každá striktní fuzzy disjunkce $\dot\vee$ je uvedeného tvaru pro nějakou rostoucí bijekci i.

Věta 2.44 (o reprezentaci nilpotentních fuzzy disjunkcí). A. Nechť $i : \langle 0,1\rangle \to \langle 0,1\rangle$ je rostoucí bijekce. Pak operace $\overset{i}{\dot\vee} : \langle 0,1\rangle^2 \to \langle 0,1\rangle$, definovaná vztahem

$$\alpha \overset{i}{\dot\vee} \beta = i^{-1}\big(i(\alpha) \overset{L}{\dot\vee} i(\beta)\big),$$

je nilpotentní fuzzy disjunkce.

B. Naopak, každá nilpotentní fuzzy disjunkce $\dot\vee$ je uvedeného tvaru pro nějakou rostoucí bijekci i, kterou nazýváme *aditivní generátor*.

Definice 2.45. *Fuzzy sjednocení* je operace na fuzzy množinách definovaná pomocí fuzzy disjunkce:

$$(A \mathbin{\dot\cup} B)(x) = A(x) \mathbin{\dot\vee} B(x).$$

Přitom $\dot\cup$ znamená obecné fuzzy sjednocení. Jednotlivé typy budeme rozlišovat stejnými indexy jako u fuzzy disjunkcí.

2.6. Fuzzy výrokové algebry

Dosud jsme zavedli 3 základní logické spojky – negaci, konjunkci a disjunkci. Pomocí nich lze vytvářet další logické formule. V této kapitole porovnáme, jaké zákony tyto operace splňují. Východiskem bude tabulka zákonů Booleových algeber.

Tabulka 2.46. Zákony Booleových algeber.

involuce:	$\underset{\cdot}{\neg}(\underset{\cdot}{\neg}\,\alpha) = \alpha,$	
komutativita:	$\alpha \mathbin{\dot\vee} \beta = \beta \mathbin{\dot\vee} \alpha,$	$\alpha \mathbin{\underset{\cdot}{\wedge}} \beta = \beta \mathbin{\underset{\cdot}{\wedge}} \alpha,$
asociativita:	$(\alpha \mathbin{\dot\vee} \beta) \mathbin{\dot\vee} \gamma = \alpha \mathbin{\dot\vee} (\beta \mathbin{\dot\vee} \gamma),$	$(\alpha \mathbin{\underset{\cdot}{\wedge}} \beta) \mathbin{\underset{\cdot}{\wedge}} \gamma = \alpha \mathbin{\underset{\cdot}{\wedge}} (\beta \mathbin{\underset{\cdot}{\wedge}} \gamma),$
distributivita:	$\alpha \mathbin{\underset{\cdot}{\wedge}} (\beta \mathbin{\dot\vee} \gamma) = (\alpha \mathbin{\underset{\cdot}{\wedge}} \beta) \mathbin{\dot\vee} (\alpha \mathbin{\underset{\cdot}{\wedge}} \gamma),$	$\alpha \mathbin{\dot\vee} (\beta \mathbin{\underset{\cdot}{\wedge}} \gamma) = (\alpha \mathbin{\dot\vee} \beta) \mathbin{\underset{\cdot}{\wedge}} (\alpha \mathbin{\dot\vee} \gamma),$
idempotence:	$\alpha \mathbin{\dot\vee} \alpha = \alpha,$	$\alpha \mathbin{\underset{\cdot}{\wedge}} \alpha = \alpha,$
absorpce:	$\alpha \mathbin{\dot\vee} (\alpha \mathbin{\underset{\cdot}{\wedge}} \beta) = \alpha,$	$\alpha \mathbin{\underset{\cdot}{\wedge}} (\alpha \mathbin{\dot\vee} \beta) = \alpha,$
absorpce s jedničkou a nulou:	$\alpha \mathbin{\dot\vee} 1 = 1,$	$\alpha \mathbin{\underset{\cdot}{\wedge}} 0 = 0,$
neutrální prvky:	$\alpha \mathbin{\dot\vee} 0 = \alpha,$	$\alpha \mathbin{\underset{\cdot}{\wedge}} 1 = \alpha,$
zákon kontradikce:		$\alpha \mathbin{\underset{\cdot}{\wedge}} \underset{\cdot}{\neg}\,\alpha = 0,$
zákon vyloučeného třetího:	$\alpha \mathbin{\dot\vee} \underset{\cdot}{\neg}\,\alpha = 1,$	
de Morganovy zákony:	$\underset{\cdot}{\neg}(\alpha \mathbin{\dot\vee} \beta) = \underset{\cdot}{\neg}\,\alpha \mathbin{\underset{\cdot}{\wedge}} \underset{\cdot}{\neg}\,\beta,$	$\underset{\cdot}{\neg}(\alpha \mathbin{\underset{\cdot}{\wedge}} \beta) = \underset{\cdot}{\neg}\,\alpha \mathbin{\dot\vee} \underset{\cdot}{\neg}\,\beta.$

Věta 2.47. Pro libovolnou fuzzy negaci, fuzzy konjunkci a fuzzy disjunkci platí následující zákony z tabulky 2.46: involuce, komutativita, asociativita, absorpce s jedničkou a nulou, neutrální prvky.

Věta 2.48. Standardní fuzzy operace $\underset{S}{\neg}, \underset{S}{\wedge}, \overset{S}{\vee}$ splňují všechny zákony z tabulky 2.46 kromě zákona kontradikce a zákona vyloučeného třetího.

Příklad 2.49. Pro $\alpha = 1/3$ dostáváme

$$\underset{S}{\neg}\,\alpha \mathbin{\underset{S}{\wedge}} \alpha = \tfrac{2}{3} \mathbin{\underset{S}{\wedge}} \tfrac{1}{3} = 1/3 \neq 0,$$

$$\underset{S}{\neg}\,\alpha \mathbin{\overset{S}{\vee}} \alpha = \tfrac{2}{3} \mathbin{\overset{S}{\vee}} \tfrac{1}{3} = 2/3 \neq 1.$$

Vždy však platí $\underset{S}{\neg}\,\alpha \mathbin{\underset{S}{\wedge}} \alpha < 1$, $\underset{S}{\neg}\,\alpha \mathbin{\overset{S}{\vee}} \alpha > 0$.

Poznámka 2.50. Speciálně upozorňujeme, že standardní operace splňují oba distributivní zákony.

Věta 2.51. Łukasiewiczovy operace $\underset{S}{\neg}, \underset{L}{\wedge}, \overset{L}{\vee}$ splňují všechny vztahy z tabulky 2.46 kromě distributivity, idempotence a zákonů absorpce.

Poznámka 2.52. Zdůrazněme, že Łukasiewiczovy operace splňují zákon kontradikce a zákon vyloučeného třetího.

Věta 2.53. Součinové operace $\underset{S}{\neg}, \underset{P}{\wedge}, \overset{P}{\vee}$ splňují pouze vztahy z věty 2.47 a de Morganovy zákony.

Mohlo by se zdát, že vhodnou volbou fuzzy operací by mohlo být splněno ještě více zákonů klasické logiky, případně všechny. To však není možné, protože tyto zákony definují Booleovy algebry a nemohou tudíž všechny platit pro netriviální zobecnění, jakým fuzzy operace jsou. Uvedeme ještě konkrétní příklad rozporu, jemuž se nelze vyhnout při zobecnění výrokových operací na $\langle 0, 1\rangle$.

Věta 2.54. Splňují-li fuzzy operace $\underset{\cdot}{\neg}, \underset{\cdot}{\wedge}, \dot\vee$ na $\langle 0, 1\rangle$ de Morganovy zákony, zákon kontradikce a zákon vyloučeného třetího, pak nesplňují distributivitu.

Důkaz. Nechť $e \in (0, 1)$ je rovnovážná hodnota fuzzy negace $\underset{\cdot}{\neg}$, tj. $\underset{\cdot}{\neg}\, e = e$. Pak

$$e \mathbin{\dot\vee} e = \underset{\cdot}{\neg}\, e \mathbin{\dot\vee} e = 1,$$

$$e \mathbin{\underset{\cdot}{\wedge}} e = \underset{\cdot}{\neg}\, e \mathbin{\underset{\cdot}{\wedge}} e = 0.$$

Z distributivity by plynulo například

$$e \mathbin{\underset{\cdot}{\wedge}} (e \mathbin{\dot\vee} e) = (e \mathbin{\underset{\cdot}{\wedge}} e) \mathbin{\dot\vee} (e \mathbin{\underset{\cdot}{\wedge}} e).$$

Podle předchozího se však levá strana rovná $e \mathbin{\underset{\cdot}{\wedge}} 1 = e$, zatímco pravá je $0 \mathbin{\dot\vee} 0 = 0$, což je spor. Není tedy možné, aby byly všechny uvedené vlastnosti splněny současně. □

Poznámka 2.55. Z reprezentačních vět pro fuzzy negace a pro striktní a nilpotentní fuzzy konjunkce (resp. disjunkce) by se mohlo zdát, že stačí změnit měřítko pomocí vhodné rostoucí bijekce $i\colon\langle 0,1\rangle \to \langle 0,1\rangle$, abychom mohli místo obecných operací pracovat se standardní fuzzy negací a součinovou nebo Łukasiewiczovou fuzzy konjunkcí. Takové zjednodušení není obecně možné. Problém je v tom, že rostoucí generátor příslušné fuzzy negace nemusí být multiplikativní či Łukasiewiczův generátor uvažované fuzzy konjunkce.

Změnou měřítka lze proto splnit jen jeden cíl – buď mít „pěknou“ (rozuměj standardní) fuzzy negaci a obecnou fuzzy konjunkci, nebo mít „pěknou“ (rozuměj součinovou nebo Łukasiewiczovu) fuzzy konjunkci a obecnou negaci.

Obojí najednou splnit obvykle nelze. Zde se kloníme k prvnímu případu, neboť každá fuzzy negace je až na změnu měřítka izomorfní se standardní fuzzy negací, kdežto reprezentační věty pro fuzzy konjunkce nejsou tak univerzální.

Stejná úvaha platí i pro fuzzy disjunkce místo konjunkcí.

2.7. Fuzzy implikace

Na rozdíl od předchozích operací pro tuto není ustálená axiomatická definice. Proto budeme za *fuzzy implikaci* považovat jakoukoli operaci $\underset{\cdot}{\to}\colon \langle 0,1\rangle^2 \to \langle 0,1\rangle$, která se na $\{0,1\}^2$ shoduje s klasickou implikací. Místo podrobnější axiomatiky uvedeme přímo způsoby, kterými jsou nejdůležitější fuzzy implikace konstruovány z jiných fuzzy operací. Zaměříme se na 2 nejčastěji používané typy implikací:

$$\alpha \overset{S}{\underset{\cdot}{\to}} \beta = \underset{S}{\neg}\,\alpha \,\dot{\vee}\, \beta \tag{SI}$$

$$\alpha \overset{R}{\underset{\cdot}{\to}} \beta = \sup\{\gamma : \ \alpha \underset{\cdot}{\wedge} \gamma \le \beta\} \tag{RI}$$

V Boolově algebře oba vzorce definují tutéž klasickou implikaci. Ve fuzzy logice se obecně liší a vedou na 2 třídy fuzzy implikací. Další členění závisí na volbě fuzzy operací na pravých stranách vzorců.

Definice 2.56. Vzorec (RI) definuje *reziduovanou fuzzy implikaci* (*reziduum*, *R-implikaci*) příslušnou fuzzy konjunkci $\underset{\cdot}{\wedge}$. Dolní index použijeme stejný jako u odpovídající fuzzy konjunkce.

Příklad 2.57. Od standardní fuzzy konjunkce $\underset{S}{\wedge}$ je odvozena *Gödelova fuzzy implikace*

$$\alpha \overset{R}{\underset{S}{\to}} \beta = \begin{cases} 1 & \text{pro } \alpha \le \beta, \\ \beta & \text{jinak.} \end{cases}$$

Tato fuzzy implikace je po částech lineární a spojitá s výjimkou bodů (α,α), $\alpha < 1$.

Příklad 2.58. Od Łukasiewiczovy fuzzy konjunkce $\underset{L}{\wedge}$ je odvozena *Łukasiewiczova fuzzy implikace*

$$\alpha \overset{R}{\underset{L}{\to}} \beta = \begin{cases} 1 & \text{pro } \alpha \le \beta, \\ 1-\alpha+\beta & \text{jinak.} \end{cases}$$

Tato fuzzy implikace je po částech lineární a všude spojitá.

Příklad 2.59. Od součinové fuzzy konjunkce $\underset{P}{\wedge}$ je odvozena *Goguenova* (též *Gainesova*) *fuzzy implikace*

$$\alpha \overset{R}{\underset{P}{\to}} \beta = \begin{cases} 1 & \text{pro } \alpha \le \beta, \\ \frac{\beta}{\alpha} & \text{jinak.} \end{cases}$$

Tato fuzzy implikace má jediný bod nespojitosti $(0,0)$.

Věta 2.60. Každá reziduovaná implikace $\overset{R}{\underset{\cdot}{\to}}$ splňuje následující podmínky:

$$\alpha \overset{R}{\underset{\cdot}{\to}} \beta = 1, \text{ právě když } \alpha \le \beta, \tag{I1}$$

$$1 \overset{R}{\underset{\cdot}{\to}} \beta = \beta, \tag{I2}$$

$$\overset{R}{\underset{\cdot}{\to}} \text{ je nerostoucí v 1. argumentu a neklesající v 2. argumentu.} \tag{I3}$$

Věta 2.61. Nechť $\underset{i}{\wedge}$ je striktní fuzzy konjunkce s multiplikativním generátorem i (dle věty ??). Pak pro příslušnou reziduovanou implikaci $\overset{R}{\underset{i}{\to}}$ platí

$$\alpha \overset{R}{\underset{i}{\to}} \beta = \begin{cases} 1 & \text{pro } \alpha \leq \beta, \\ i^{-1}\left(\frac{i(\beta)}{i(\alpha)}\right) & \text{jinak.} \end{cases}$$

Věta 2.62. Nechť $\underset{i}{\wedge}$ je nilpotentní fuzzy konjunkce s Łukasiewiczovým generátorem i (dle věty ??). Pak pro příslušnou reziduovanou implikaci $\overset{R}{\underset{i}{\to}}$ platí

$$\alpha \overset{R}{\underset{i}{\to}} \beta = \begin{cases} 1 & \text{pro } \alpha \leq \beta, \\ i^{-1}\big(1 - i(\alpha) + i(\beta)\big) & \text{jinak.} \end{cases}$$

Důsledek 2.63. Reziduovaná fuzzy implikace příslušná spojité fuzzy konjunkci $\underset{\cdot}{\wedge}$ je spojitá, právě když $\underset{\cdot}{\wedge}$ je nilpotentní.

Definice 2.64. Vzorec (SI) definuje *S-implikaci* odpovídající fuzzy disjunkci $\dot{\vee}$ a fuzzy negaci $\underset{S}{\neg}$. Při konstrukci S-implikace zde uvažujeme vždy pouze standardní fuzzy negaci a dolní index S-implikace bude označovat použitou fuzzy disjunkci.

Příklad 2.65. Ze standardní fuzzy disjunkce dostáváme *Kleeneovu-Dienesovu* fuzzy implikaci

$$\alpha \overset{S}{\underset{S}{\to}} \beta = \max(1 - \alpha, \beta).$$

Příklad 2.66. Z Łukasiewiczovy fuzzy disjunkce dostáváme *Łukasiewiczovu* fuzzy implikaci, která se shoduje s Łukasiewiczovou reziduovanou fuzzy implikací.

Příklad 2.67. Ze součinové fuzzy disjunkce dostáváme *Reichenbachovu* fuzzy implikaci

$$\alpha \overset{S}{\underset{P}{\to}} \beta = 1 - \alpha + \alpha\beta.$$

Na fuzzy implikace je možno klást i další požadavky. Kromě již uvedených (I1), (I2), (I3) se často požaduje:

$$\alpha \dot{\to} \beta = \underset{\cdot}{\neg}\beta \dot{\to} \underset{\cdot}{\neg}\alpha, \tag{I4}$$

$$\alpha \dot{\to} (\beta \dot{\to} \gamma) = \beta \dot{\to} (\alpha \dot{\to} \gamma), \tag{I5}$$

spojitost. (I6)

Všechny požadavky (I1)–(I6) splňují ze zde probíraných fuzzy implikací pouze ty reziduované, které odpovídají nilpotentním fuzzy konjunkcím dle věty ??. Příkladem je Łukasiewiczova fuzzy implikace.

Vzorec pro S-implikaci používá fuzzy negaci, která musí být předem dána. Naopak reziduovanou implikaci lze použít pro definici *zobecněné fuzzy negace* $\underset{\cdot}{\neg}$ předpisem

$$\underset{\cdot}{\neg}\alpha = \alpha \overset{R}{\underset{\cdot}{\to}} 0.$$

Použijeme-li na pravé straně například Gödelovu nebo Goguenovu fuzzy implikaci ($\overset{R}{\underset{S}{\to}}$ nebo $\overset{R}{\underset{P}{\to}}$), dostaneme Gödelovu zobecněnou fuzzy negaci $\underset{G}{\neg}$. Łukasiewiczova fuzzy implikace $\overset{R}{\underset{L}{\to}}$ dává tímto způsobem standardní fuzzy negaci $\underset{S}{\neg}$.

Poznámka 2.68. Pojem fuzzy implikace není dosud ustálený. Někteří autoři [Hájek, Turunen] uvažují pouze reziduované fuzzy implikace. Naopak v některých pramenech jsou jako fuzzy implikace označovány i operace, které se ani na $\{0,1\}^2$ neshodují s klasickou implikací. Například standardní konjunkce $\underset{S}{\wedge}$ je někdy nevhodně označována jako „Mamdaniho implikace".

2.8. Fuzzy biimplikace (ekvivalence)

Od implikace $\underset{\cdot}{\to}$ se odvozuje komutativní operace $\underset{\cdot}{\leftrightarrow}$, obvykle definovaná vztahem

$$\alpha \underset{\cdot}{\leftrightarrow} \beta = (\alpha \underset{\cdot}{\to} \beta) \underset{\cdot}{\wedge} (\beta \underset{\cdot}{\to} \alpha).$$

Pokud $\underset{\cdot}{\to}$ splňuje (I1) (například pro reziduovanou implikaci), je vždy aspoň jedna ze závorek na pravé straně rovna jedné, takže nezáleží na volbě fuzzy konjunkce $\underset{\cdot}{\wedge}$. Výsledná operace $\underset{\cdot}{\leftrightarrow}$ bývá označována jako *fuzzy ekvivalence*. Protože však pojem ekvivalence označuje i speciální relaci (viz dále), dáváme zde přednost (rovněž častému) pojmu *fuzzy biimplikace*. Indexujeme ji stejně jako fuzzy implikaci, z níž vznikla.

Příklad 2.69. *Lukasiewiczova* fuzzy biimplikace: $\alpha \overset{R}{\underset{L}{\leftrightarrow}} \beta = 1 - |\alpha - \beta|$.
Göedelova fuzzy biimplikace:

$$\alpha \overset{R}{\underset{S}{\leftrightarrow}} \beta = \begin{cases} 1 & \text{pro } \alpha = \beta, \\ \alpha \underset{S}{\wedge} \beta & \text{jinak.} \end{cases}$$

Součinová fuzzy biimplikace:

$$\alpha \overset{R}{\underset{P}{\leftrightarrow}} \beta = \begin{cases} 1 & \text{pro } \alpha = \beta = 0, \\ \dfrac{\alpha \underset{S}{\wedge} \beta}{\alpha \overset{S}{\vee} \beta} & \text{jinak.} \end{cases}$$

Věta 2.70. Pro reziduovanou fuzzy implikaci $\overset{R}{\underset{\cdot}{\to}}$ a jí příslušnou fuzzy biimplikaci platí

$$\alpha \overset{R}{\underset{\cdot}{\leftrightarrow}} \beta = (\alpha \overset{S}{\vee} \beta) \overset{R}{\underset{\cdot}{\to}} (\alpha \underset{S}{\wedge} \beta).$$

2.9. Agregační operátory

Dosud uvedené fuzzy logické operace se snažily o zobecnění operací klasické logiky. Pro zpracování vágních informací však bývají užitečné i operace, které žádnou analogii v Booleových algebrách nemají. Jako příklad uvažujme sdružení informací, které nám o téže otázce poskytne skupina expertů. Z jejich údajů chceme vypočítat jeden „kolektivní názor“, jakýsi druh průměru. K tomu účelu se nabízejí agregační operátory a jejich podtřída, fuzzy průměry. (Zde prezentovaný přístup pochází z [Klir-Yuan].)

V této kapitole se budeme zabývat operátory, jejich počet argumentů (arita) není pevně daný, ale může jím být libovolné celé číslo $n \geq 2$. *Agregační operátor* (angl. *aggregation operator*) je zobrazení h, které každé n-tici hodnot z $\langle 0, 1\rangle$ $(n \geq 2)$ přiřadí číslo z $\langle 0, 1\rangle$ v souladu s následujícími podmínkami:

$$h(0, \dots, 0) = 0, \quad h(1, \dots, 1) = 1, \tag{A1}$$

$$(\forall i = 1, \dots, n : \alpha_i \leq \beta_i) \Rightarrow h(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \leq h(\beta_1, \dots, \beta_n), \tag{A2}$$

$$h \text{ je spojité.} \tag{A3}$$

Agregační operátor se nazývá *fuzzy průměr* (angl. *averaging operator*), splňuje-li navíc podmínky

$$\text{pro každou permutaci } p \text{ čísel } 1, \dots, n \text{ je} \quad h(\alpha_{p(1)}, \dots, \alpha_{p(n)}) = h(\alpha_1, \dots, \alpha_n), \tag{A4}$$

$$\forall \alpha \in \langle 0, 1\rangle : \ h(\alpha, \dots, \alpha) = \alpha. \tag{A5}$$

(Podmínka (A5) je zesílením podmínky (A1).)

Příklad 2.71. Všechny fuzzy konjunkce a disjunkce splňují podmínky (A1)– (A4), takže to jsou agregační operátory. Standardní fuzzy konjunkce a disjunkce splňují i idempotenci (A5), jsou to tedy fuzzy průměry.

Věta 2.72. Pokud h splňuje podmínky (A2), (A5), pak $\min \leq h \leq \max$ (ve smyslu uspořádání funkcí).

Poznámka 2.73. Někdy budeme připouštět i agregační operátory, které nejsou definovány na celém oboru $\langle 0,1\rangle^n$.

Příklad 2.74. *Zobecněný průměr* (angl. *generalized means*) h_λ je pro $\lambda \in \mathbf{R}$, $\lambda \neq 0$, definován vzorcem

$$h_\lambda(\alpha_1,\ldots,\alpha_n) = \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^\lambda\right)^{\frac{1}{\lambda}}.$$

(Pro $\lambda < 0$ je definován jen pro α_i kladná.) Je to fuzzy průměr.

Speciálně dostáváme:

- pro $\lambda = 1$ aritmetický průměr,
- pro $\lambda = 2$ kvadratický průměr,
- pro $\lambda = -1$ harmonický průměr,
- pro $\lambda \to 0$ geometrický průměr,
- pro $\lambda \to +\infty$ maximum,
- pro $\lambda \to -\infty$ minimum.

Příklad 2.75. *Vážený průměr* h_w je pro $n \in \mathbf{N}$ určen vektorem vah $w = (w_1,\ldots,w_n) \in \langle 0,1\rangle^n$ splňujícím $\sum_{i=1}^n w_n = 1$:

$$h_w(\alpha_1,\ldots,\alpha_n) = \sum_{i=1}^{n} w_i\alpha_i.$$

Splňuje (A1)– (A3) a (A5), je to tedy agregační operátor, který je aditivní; tj. splňuje

$$h(\alpha_1+\beta_1,\ldots,\alpha_n+\beta_n) = h(\alpha_1,\ldots,\alpha_n) + h(\beta_1,\ldots,\beta_n).$$

(Aditivita je slabší forma linearity.)

Příklad 2.76. *Uspořádaný vážený průměr* (ang. *ordered weighted averaging operator*, *OWA-operator*) $\overline{h}_w$ je určen vektorem vah $w = (w_1,\ldots,w_n) \in \langle 0,1\rangle^n$ splňujícím $\sum_{i=1}^n w_n = 1$:

$$\overline{h}_w(\alpha_1,\ldots,\alpha_n) = \sum_{i=1}^{n} w_i\alpha_{p(i)},$$

kde p je permutace indexů taková, že

$$\alpha_{p(1)} \leq \alpha_{p(2)} \leq \cdots \leq \alpha_{p(n)}.$$

Od váženého průměru se liší tím, že nejprve argumenty seřadíme podle velikosti, a teprve pak jim přiřadíme váhy (podle jejich pořadí v uspořádané posloupnosti). Díky tomu je splněna i podmínka (A4) a dostáváme fuzzy průměr.

Speciálně dostáváme

- pro $w = (1,0,\ldots,0)$ minimum,
- pro $w = (0,\ldots,0,1)$ maximum,
- pro $w = (1/n,1/n,\ldots,1/n)$ aritmetický průměr.
- pro $w = (0,1/(n-2),1/(n-2),\ldots,1/(n-2),0)$ operátor, používaný např. v hodnocení krasobruslařů — napřed se vyškrtne největší a nejmenší prvek, pak se ze zbývajících vypočte aritmetický průměr.

Mnoho dalších příkladů lze zkonstruovat pomocí následující věty.

Věta 2.77. Nechť $h, h_1,\ldots,h_k$ jsou agregační operátory (resp. fuzzy průměry). Pak zobrazení

$$H(\alpha_1,\ldots\alpha_n) = h\big(h_1(\alpha_1,\ldots\alpha_n),\ldots,h_k(\alpha_1,\ldots\alpha_n)\big)$$

je agregační operátor (resp. fuzzy průměr).

3. Fuzzy relace

V této kapitole se budeme zabývat fuzzifikací binárních relací. Nejprve připomene potřebné pojmy pro ostré množiny.

3.1. Binární relace v klasické teorii množin

Definice 3.1. Nechť X, Y jsou množiny. Binární *relace* R z X do Y je (jakákoli) podmnožina kartézského součinu $X \times Y$. Ve vztahu k relaci $R \subseteq X \times Y$ označujeme X jako množinu *vzorů* a Y jako množinu *obrazů*. *Inverzní relace* k R je relace R^{-1} z Y do X

$$R^{-1} = \big\{(y,x) \in Y \times X : \ (x,y) \in R\big\}.$$

Definice 3.2. Nechť X, Y, Z jsou množiny. *Složená relace* z relací $R \subseteq X \times Y$, $S \subseteq Y \times Z$ je relace $R \circ S$ z X do Z

$$R \circ S = \Big\{(x,z) \in X \times Z : \ \big(\exists y \in Y : (x,y) \in R, (y,z) \in S\big)\Big\}.$$

Pokud je stejná množina X množinou vzorů i množinou obrazů, pak mezi podmnožinami kartézského součinu $X \times X$ rozlišujeme následující *speciální relace*:

Definice 3.3. Nechť X je množina. *Rovnost* na X je relace

$$\delta = \big\{(x,x) : \ x \in X\big\}.$$

Pro $R \subseteq X \times X$ definujeme

- *reflexivitu*: $\forall x \in X : \ (x,x) \in R$, tj. $\delta \subseteq R$,
- *symetrii*: $(x,y) \in R \Rightarrow (y,x) \in R$, tj. $R = R^{-1}$,
- *antisymetrii*: $\big((x,y) \in R\big) \wedge \big((y,x) \in R\big) \Rightarrow x = y$, tj. $R \cap R^{-1} \subseteq \delta$,
- *tranzitivitu*: $\big((x,y) \in R\big) \wedge \big((y,z) \in R\big) \Rightarrow (x,z) \in R$, tj. $R \circ R \subseteq R$,
- *částečné uspořádání*: relace antisymetrická, reflexivní a tranzitivní,
- *ekvivalenci*: relace symetrická, reflexivní a tranzitivní.

Poznámka 3.4. Zde používaný termín ekvivalence pro *binární relaci* nemá nic společného s biimplikací (rovněž nazývanou ekvivalence) z odstavce 2.8. Biimplikace je *binární operace*, tedy *ternární relace*.

V duchu zde používané konvence ztotožňujeme množiny s jejich charakteristickými funkcemi (funkcemi příslušnosti). Přeložíme předchozí pojmy do této symboliky. Ostrá relace R z X do Y je funkce $R : X \times Y \to \{0,1\}$. Inverzní relace $R^{-1} : Y \times X \to \{0,1\}$ splňuje

$$R^{-1}(y,x) = R(x,y).$$

Složená relace z relací $R : X \times Y \to \{0,1\}$ a $S : Y \times Z \to \{0,1\}$ je $R \circ S : X \times Z \to \{0,1\}$

$$(R \circ S)(x,z) = \sup_{y \in Y} \big\{R(x,y) \wedge S(y,z)\big\},$$

kde $\wedge$ je klasická konjunkce.

Rovnost na X je $\delta : X \times X \to \{0,1\}$

$$\delta(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{pro } x = y, \\ 0 & \text{pro } x \neq y, \end{cases}$$

tedy jedná se o binární operaci známou jako *Kroneckerovo delta*.

Ostatní speciální relace již byly charakterizovány i ve tvarech, jaké potřebujeme pro další zobecnění.

3.2. Fuzzifikace binárních relací

Definice 3.5. Nechť X, Y jsou ostré množiny. *Fuzzy relace* R z X do Y je (jakákoli) fuzzy podmnožina kartézského součinu $X \times Y$, tedy $R \in \mathcal{F}(X \times Y)$, neboli $R : X \times Y \to \langle 0, 1\rangle$. *Inverzní relace* k R je $R^{-1} \in \mathcal{F}(Y \times X)$ taková, že $\forall x \in X\ \forall y \in Y : R^{-1}(y, x) = R(x, y)$.

Definice 3.6. Nechť X, Y, Z jsou ostré množiny, $R \in \mathcal{F}(X \times Y)$, $S \in \mathcal{F}(Y \times Z)$. Pak $\cdot$*-složená relace* $R \underset{\cdot}{\circ} S \in \mathcal{F}(X \times Z)$ je definována vztahem

$$\forall x \in X\ \forall z \in Z : (R \underset{\cdot}{\circ} S)(x, z) = \overset{S}{\bigvee}_{y \in Y} R(x, y) \underset{\cdot}{\wedge} S(y, z),$$

kde $\underset{\cdot}{\wedge}$ je pevně zvolená fuzzy konjunkce. Dostáváme různé typy skládání, které označujeme stejným indexem jako příslušnou fuzzy konjunkci a hovoříme o S-skládání (standardním skládání) apod.

Poznámka 3.7. Roli existenčního kvantifikátoru z definice skládání ostrých relací zde přebírá standardní fuzzy disjunkce přes všechny hodnoty $y \in Y$. I zde bychom si mohli představit jinou fuzzy disjunkci, ale takové zobecnění by mělo podstatnou vadu: Uvažme, že množina Y může být velká, například nespočetná. Při použití jiné (například archimedovské) fuzzy disjunkce by výsledek byl velmi často jednotkový a nenesl by užitečnou informaci o argumentech takové operace.

Poznámka 3.8. Pro konečné množiny X, Y, Z lze fuzzy relace reprezentovat maticemi a složenou relaci počítat obdobně jako součin matic, kde místo součinu prvků aplikujeme fuzzy konjunkci $\underset{\cdot}{\wedge}$ a místo součtu standardní fuzzy disjunkci $\overset{S}{\vee}$.

Speciální fuzzy relace lze zavést zcela analogicky jako pro ostré relace:

Definice 3.9. Nechť X je ostrá množina. Pro $R \in \mathcal{F}(X \times X)$ definujeme

- *reflexivitu*: $\delta \subseteq R$,
- *symetrii*: $R = R^{-1}$,
- $\cdot$*-antisymetrii*: $R \underset{\cdot}{\cap} R^{-1} \subseteq \delta$,
- $\cdot$*-tranzitivitu*: $R \underset{\cdot}{\circ} R \subseteq R$,
- $\cdot$*-částečné uspořádání*: fuzzy relace $\cdot$-antisymetrická, reflexivní a $\cdot$-tranzitivní,
- $\cdot$*-ekvivalenci*: fuzzy relace symetrická, reflexivní a $\cdot$-tranzitivní.

Je třeba mít na paměti, že poslední čtyři pojmy závisí na volbě fuzzy konjunkce $\underset{\cdot}{\wedge}$, vyskytující se v příslušných vztazích. Pro ostré množiny všechny tyto pojmy mají svůj obvyklý význam z klasické teorie množin.

Věta 3.10 (vlastnosti skládání fuzzy relací). Nechť R, S a T jsou fuzzy relace s takovými definičními obory, aby následující rovnosti (postupně, ne všechny současně) měly smysl. Platí:

$$R \underset{\cdot}{\circ} (S \underset{\cdot}{\circ} T) = (R \underset{\cdot}{\circ} S) \underset{\cdot}{\circ} T \qquad \text{(asociativita)}$$

$$(R \overset{S}{\cup} S) \underset{\cdot}{\circ} T = (R \underset{\cdot}{\circ} T) \overset{S}{\cup} (S \underset{\cdot}{\circ} T) \qquad \text{(distributivita zprava)}$$

$$R \underset{\cdot}{\circ} (S \overset{S}{\cup} T) = (R \underset{\cdot}{\circ} S) \overset{S}{\cup} (R \underset{\cdot}{\circ} T) \qquad \text{(distributivita zleva)}$$

kde $\underset{\cdot}{\circ}$ značí $\cdot$-skládání vzhledem k libovolné pevně zvolené fuzzy konjunkci $\underset{\cdot}{\wedge}$. U distributivity můžeme také nahradit sjednocení $\overset{S}{\cup}$ průnikem $\underset{S}{\cap}$.

3.3. Konzistence fuzzy relací

V této části podáme některé vlastnosti fuzzy množin, zejména fuzzy relací, které nemají adekvátní obdobu v ostrých množinách. Nejprve vezmeme na vědomí následující skutečnost.

Věta 3.11. Vytvoření α-řezu fuzzy množiny (kde $\alpha \in \langle 0, 1\rangle$) lze interpretovat jako specifický způsob defuzzifikace: Uvažujme zobrazení $r_\alpha : \mathcal{F}(X) \to \mathcal{P}(X)$ vzniklé aplikací skokové funkce r_α bod po bodu, kde

$$r_\alpha(\beta) = \begin{cases} 1 & \text{pro } \beta \geq \alpha, \\ 0 & \text{pro } \beta < \alpha. \end{cases}$$

Platí $R_A(\alpha)(x) = r_\alpha\big(A(x)\big)$, kde $A \in \mathcal{F}(X)$, $x \in X$.

Definice 3.12. Vlastnost fuzzy množiny se nazývá *konzistentní* (angl. *cutworthy*), jestliže každá fuzzy množina A má tuto vlastnost, právě když tutéž vlastnost mají všechny α-řezy $R_A(\alpha)$ pro $\alpha > 0$.

Poznámka 3.13. Triviální 0-řez $R_A(0) = X$ zde záměrně neuvažujeme.

Příklad 3.14. Uvažujme následující vlastnost fuzzy množiny A (tzv. *zesílenou formu normality*): $\exists x \in X : A(X) = 1$. Tato vlastnost je konzistentní. (Pro ostré množiny se tato vlastnost shoduje s neprázdností.) Naproti tomu „ostrost množiny“ není konzistentní, neboť všechny řezy fuzzy množiny jsou ostré, i když tato fuzzy množina ostrá není.

Věta 3.15. Následující vlastnosti fuzzy relací jsou konzistentní:

- „být rovností“ ($R = \delta$),
- reflexivita,
- symetrie,
- standardní antisymetrie,
- standardní tranzitivita,
- standardní částečné uspořádání,
- standardní ekvivalence.

Poznámka 3.16. Konzistenci lze využít například k testování, zda daná fuzzy relace je standardní ekvivalence apod. Vše lze převést na klasický postup uplatněný pro všechny řezy.

Jiné než standardní druhy antisymetrie a tranzitivity (například součinová tranzitivita) nejsou konzistentní, což komplikuje jejich ověřování a použití.

3.4. Projekce a cylindrické rozšíření

Zde se seznámíme s dalšími konstrukcemi, jejichž analogie pro ostré množiny buď neexistují, nebo jsou triviální.

Definice 3.17. Nechť X, Y jsou ostré množiny, $R \in \mathcal{F}(X \times Y)$. *Levá (první) projekce* R je $P_1(R) \in \mathcal{F}(X)$, kde

$$P_1(R)(x) = \overset{S}{\bigvee}_{y \in Y} R(x, y).$$

Pravá (druhá) projekce R je $P_2(R) \in \mathcal{F}(Y)$, kde

$$P_2(R)(y) = \overset{S}{\bigvee}_{x \in X} R(x, y).$$

Vzhledem ke geometrické analogii se projekce někdy nazývá *stín*.

Poznámka 3.18. Standardní fuzzy disjunkce v této definici znamená supremum. Zobecnění na jiné fuzzy disjunkce nelze doporučit ze stejných důvodů, jako v poznámce 3.7.

V jistém omezeném smyslu je opačnou operací k projekci cylindrické rozšíření:

Definice 3.19. Nechť X, Y jsou ostré množiny, $A \in \mathcal{F}(X)$, $B \in \mathcal{F}(Y)$. *Cylindrické rozšíření* A a B (též *kartézský součin* fuzzy množin) je $A \times B \in \mathcal{F}(X \times Y)$, kde

$$(A \times B)(x, y) = A(x) \underset{S}{\wedge} B(y).$$

Věta 3.20. Cylindrické rozšíření $A \times B$ je maximální fuzzy relace $R \in \mathcal{F}(X \times Y)$ taková, že $P_1(R) \leq A$ a $P_2(R) \leq B$.

Poznámka 3.21. V předchozím tvrzení nelze obecně požadovat rovnost. K tomu by musely A i B mít stejnou výšku.

4. Princip rozšíření

Princip rozšíření je jednou ze základních myšlenek, kterou obohatil teorii L. Zadeh. Umožňuje aplikovat na fuzzy množiny funkce a operace, definované původně pro jednodušší objekty, např. čísla.

4.1. Rozšíření binárních relací na ostré množiny

Zde ukážeme, jakým způsobem se například aritmetické operace na reálných číslech rozšiřují na ostré množiny reálných čísel. Dostaneme tak mj. tzv. intervalovou aritmetiku. Celý postup uvedeme obecněji.

Připomeňme, že *zobrazení* je taková binární relace $R \subseteq X \times Y$, pro kterou platí: pro každý prvek z X existuje právě jeden prvek $y = r(x) \in Y$ takový, že $(x,y) \in R$. Na zobrazení $r : X \to Y$ tedy můžeme pohlížet jako na relaci $R \subseteq X \times Y$ s uvedenou vlastností. Zápis $(x,y) \in R$ je ekvivalentní s $y = r(x)$. Také je $R = \big\{\big(x, r(x)\big) : x \in X\big\}$.

Definice 4.1. Nechť $R \subseteq X \times Y$ je libovolná relace (nemusí být nutně zobrazením). Zobrazení $r : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(Y)$, které každé množině $A \subseteq X$ přiřadí množinu $B \subseteq Y$ podle předpisu

$$r(A) = \big\{y \in Y : \big(\exists x \in A : (x,y) \in R\big)\big\} \tag{4.1}$$

nazýváme *rozšířením* relace R.

Analogicky zobrazení $r^{-1} : \mathcal{P}(Y) \to \mathcal{P}(X)$ definované vzorcem

$$r^{-1}(B) = \big\{x \in X : \big(\exists y \in B : (x,y) \in R\big)\big\} \tag{4.2}$$

je rozšířením relace R^{-1}.

Poznámka 4.2. Rozšíření r a r^{-1} z původní definice jsou zobrazení, i když původní relace R zobrazení není. Nejsou však navzájem inverzní, tj. $r \circ r^{-1}$ nemusí být identita, jak ukážeme v příkladech.

Pokud výchozí relace R je navíc zobrazení, pak ji budeme též psát ve tvaru $r : X \to Y$ a podle kontextu poznáme, zda písmeno r značí původní robrazení, nebo jeho rozšíření. Vzorce (4.1) a (4.2) pak nabývají jednodušší tvar

$$r(A) = \big\{r(x) : x \in X\big\},$$
$$r^{-1}(B) = \big\{x \in X : r(x) \in B\big\}.$$

Použití stejného symbolu pro dvě formálně různá zobrazení $r : X \to Y$ a $r : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(Y)$ lze ospravedlnit tím, že první z nich splňuje rovnost $r(x) = y$ právě tehdy, když druhé splňuje $r(\{x\}) = \{y\}$.

Příklad 4.3. Nechť $R = \{(x, \sin x) : x \in \mathbf{R}\}$, tj. uvažujeme funkci (zobrazení, relaci) sinus. Inverzní relace $\sin^{-1}$ není zobrazení. Rozšíříme relace $\sin, \sin^{-1}$ na zobrazení z podmnožin reálných čísel do podmnožin reálných čísel a příslušná rozšíření značíme stejně. Pak například

$$\sin\left(\left\langle \tfrac{\pi}{4}, 2\right\rangle\right) = \left\langle \tfrac{1}{\sqrt{2}}, 1\right\rangle,$$
$$\sin^{-1}\left(\left\{\tfrac{1}{2}\right\}\right) = \left\{\tfrac{\pi}{4} + 2k\pi : k \in \mathbf{Z}\right\} \cup \left\{\tfrac{3\pi}{4} + 2k\pi : k \in \mathbf{Z}\right\},$$

kde $\mathbf{Z}$ značí množinu všech celých čísel. Zde $\sin \circ \sin^{-1}$ je identické zobrazení (na $\langle -1, 1\rangle$), ale $\sin^{-1} \circ \sin$ nikoli.

Používáme-li rozšířené operace na jednobodové množiny, množinové závorky pro zjednodušení vynecháváme; zejména

$$r^{-1}(y) = r^{-1}(\{y\}) = \big\{x \in X : r(x) = y\big\}.$$

Tento zápis jsme již dříve použili, například v definici hladiny.

Příklad 4.4. Nechť $X = \{a, b, c\}$, $Y = \{1, 2\}$, $R = \{(a,1), (b,1), (c,2)\}$. Pak například

$$r(\{a\}) = r(\{b\}) = r(\{a,b\}) = \{1\},$$
$$r(\{a,c\}) = r(\{b,c\}) = r(X) = Y,$$
$$r^{-1}(\{1\}) = \{a,b\},$$
$$r^{-1}(\{2\}) = \{c\},$$
$$r^{-1}(Y) = X,$$
$$r^{-1}\big(r(\{a\})\big) = \{a,b\},$$

takže r^{-1} není inverzní k r.

Poznámka 4.5. Zapišme si vzorec (4.1) tak, že použijeme funkci příslušnosti:

$$r(A)(y) = \begin{cases} 1 & \text{pokud } \exists x \in A : (x,y) \in R \\ 0 & \text{jinak} \end{cases} = \begin{cases} 1 & \text{pokud } \exists x \in X : (R(x,y) \wedge A(x) = 1) \\ 0 & \text{jinak} \end{cases} =$$
$$= \sup_{x \in X} R(x,y) \wedge A(x).$$

Podobně vychází:

$$r^{-1}(B)(x) = \sup_{y \in Y} R(x,y) \wedge B(y).$$

Připomeňme, že zatím pracujeme s ostrými množinami, takže funkce příslušnosti nabývá pouze hodnot 0 nebo 1. Přesněji $A(x) = 1$ pro $x \in A$ a $A(x) = 0$ jinak. Stejně tak $R(x,y) = 1$ pro $(x,y) \in R$ a $R(x,y) = 0$ jinak. Tato poznámka je jen přípravnou úvahou pro následující definici.

4.2. Princip rozšíření binárních relací na fuzzy množiny

Definice 4.6. Nechť $R \subseteq X \times Y$ je ostrá relace. Definujeme *rozšíření* této relace $r : \mathcal{F}(X) \to \mathcal{F}(Y)$ předpisem

$$r(A)(y) = \overset{S}{\bigvee}_{x \in X} R(x,y) \underset{\cdot}{\wedge} A(x), \tag{4.3}$$

kde $A \in \mathcal{F}(X)$, $y \in Y$. Podobně rozšíření relace R^{-1} je zobrazení $r^{-1} : \mathcal{F}(Y) \to \mathcal{F}(X)$ dané vzorcem

$$r^{-1}(B)(x) = \overset{S}{\bigvee}_{y \in Y} R(x,y) \underset{\cdot}{\wedge} B(y),$$

kde $B \in \mathcal{F}(Y)$, $x \in X$.

Poznámka 4.7. Protože R je ostrá relace, na volbě fuzzy konjunkce $\underset{\cdot}{\wedge}$ nezáleží. Symbol $\overset{S}{\bigvee}$ ve vzorcích z definice odpovídá supremu. Proti použití jiné než standardní fuzzy disjunkce lze vznést stejnou námitku, jako v poznámce 3.7.

Uvedený postup, zavedený Zadehem [Zadeh] a nazývaný *princip rozšíření*, dovoluje aplikovat na fuzzy množiny z $\mathcal{F}(\mathbf{R})$ funkce, které jsou původně definovány jako funkce reálné proměnné.

Příklad 4.8. Nechť $A \in \mathcal{F}(\mathbf{R})$,

$$A(x) = \begin{cases} \frac{x+1}{2} & \text{pro } x \in \langle -1, 1\rangle, \\ \frac{3-x}{2} & \text{pro } x \in (1, 3\rangle, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Zobrazme A následujícími funkcemi:
a) unární $-$,
b) druhá mocnina.
Jinými slovy, najděme fuzzy množiny $-A$ a A^2.

Řešení. Ad a) Zde $R = \{(x, -x) : x \in \mathbf{R}\}$, tedy $R(x,y) = \delta(x, -y)$. Podle (4.3) je

$$(-A)(y) = \overset{S}{\bigvee}_{x \in X} R(x,y) \underset{\cdot}{\wedge} A(x) = \overset{S}{\bigvee}_{x \in X} \delta(x,-y) \underset{\cdot}{\wedge} A(x) = A(-y)$$

Zdůvodníme poslední rovnost: výraz $\delta(x,-y) \underset{\cdot}{\wedge} A(x)$ dává nenulový výsledek jen tehdy, když $x = -y$ a tudíž počítáme supremum z jednobodové množiny $\{\delta(-y,-y) \underset{\cdot}{\wedge} A(-y)\} = \{1 \underset{\cdot}{\wedge} A(-y)\} = \{A(-y)\}$.

Dostáváme výsledek

$$(-A)(y) = A(-y) = \begin{cases} \frac{3+y}{2} & \text{pro } y \in \langle -3, -1), \\ \frac{1-y}{2} & \text{pro } y \in \langle -1, 1\rangle, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Ad b) Zde $R = \{(x, x^2) : x \in \mathbf{R}\}$, takže $R(x,y) = 1$ právě tehdy, když $x = \pm\sqrt{y}$. Podle (4.3) dostáváme pro $y \geq 0$:

$$A^2(y) = \overset{S}{\bigvee}_{x \in X} R(x,y) \underset{\cdot}{\wedge} A(x) = A(\sqrt{y}) \overset{S}{\vee} A(-\sqrt{y}) = \max\bigl(A(\sqrt{y}), A(-\sqrt{y})\bigr).$$

Pro $y > 0$ je hodnota $R(x,y) \underset{\cdot}{\wedge} A(x)$ nenulová pro $x = \pm\sqrt{y}$, takže se nám supremum přes $x \in X$ redukuje na uvedené maximum ze dvou hodnot. Pro $y < 0$ je $R(x,y) = 0$ pro všechna $x \in \mathbf{R}$, takže v tomto případě je $A(y) = 0$.

Pro naši konkrétní množinu A máme tento výsledek:

$$A(y) = \begin{cases} \frac{\sqrt{y}+1}{2} & \text{pro } y \in \langle 0,1\rangle, \\ \frac{3-\sqrt{y}}{2} & \text{pro } y \in \langle 1,9\rangle, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Věta 4.9. Rozšíření $r : \mathcal{F}(X) \to \mathcal{F}(Y)$ binární relace $R \subseteq X \times Y$ má následující vlastnosti

$$\begin{aligned} r(\emptyset) &= \emptyset, \\ A_1 \subseteq A_2 &\Rightarrow r(A_1) \subseteq r(A_2), \\ r\Big(\dot{\bigcup}_i A_i\Big) &= \dot{\bigcup}_i r(A_i), \\ r\Big(\underset{\cdot}{\bigcap}_i A_i\Big) &\subseteq \underset{\cdot}{\bigcap}_i r(A_i) \quad \text{(nemusí platit rovnost).} \end{aligned}$$

Stejné vzorce platí i pro $r^{-1} : \mathcal{F}(Y) \to \mathcal{F}(X)$.

Věta 4.10. Pokud je R navíc zobrazení, pak platí

$$r^{-1}\Big(\underset{\cdot}{\bigcap}_i A_i\Big) = \underset{\cdot}{\bigcap}_i r^{-1}(A_i).$$

Věta 4.11. Pro všechna $\alpha \in \langle 0,1\rangle$ platí

$$\begin{aligned} r\big(R_A(\alpha)\big) &\subseteq R_{r(A)}(\alpha), \\ r\big(S_A(\alpha)\big) &= S_{r(A)}(\alpha), \end{aligned}$$

Pro konečné množiny platí rovnost i v prvním vztahu.

4.3. Konvexní fuzzy množiny

Definice 4.12. Nechť L je lineární prostor. Ostrá podmožina $A \subseteq L$ se nazývá *konvexní*, jestliže pro všechna $x, y \in A$ a pro všechna $\lambda \in (0,1)$ platí $\lambda x + (1-\lambda)\, y \in A$.

Ztotožníme-li A s její funkcí příslušnosti, bylo by možné definičné vztah psát

$$\min\big(A(x), A(y)\big) \leq A\big(\lambda x + (1-\lambda)\, y\big).$$

To nám umožňuje zobecnění na fuzzy množiny.

Definice 4.13. Nechť X je ostrá konvexní podmnožina lineárního prostoru. Fuzzy množina $A \in \mathcal{F}(X)$ se nazývá *konvexní*, jestliže

$$\forall x, y \in X \quad \forall \lambda \in (0,1) : \quad A\big(\lambda x + (1-\lambda)\, y\big) \geq A(x) \underset{S}{\wedge} A(y).$$

Věta 4.14. Konvexita je konzistentní vlastnost.

Konvexní fuzzy množiny tedy snadno poznáme podle toho, že mají všechny řezy konvexní.

5. Fuzzy čísla a fuzzy intervaly

5.1. Zavedení pojmů a základní vlastnosti

Definice 5.1. *Fuzzy interval* je taková množina $A \in \mathcal{F}(\mathbf{R})$, která splňuje následující podmínky:

- $\operatorname{Supp} A$ je omezená množina,
- Pro všechna $\alpha \in (0,1\rangle$ je $R_A(\alpha)$ uzavřený interval,
- $R_A(1) \neq \emptyset$ (tj. $R_A(1)$ je neprázdný uzavřený interval).

Je-li navíc $R_A(1)$ jednobodová množina, nazývá se A *fuzzy číslo*.

Poznámka 5.2. Toto je převládající, nikoli však jediná definice fuzzy čísla, s jakou se lze setkat v literatuře. Pro fuzzy intervaly a fuzzy čísla se používá termín *fuzzy kvantity.*

Podle věty 4.14 jsou fuzzy intervaly konvexní.

Jednoprvkové množiny reálných čísel jsou zvláštním případem fuzzy čísel, odpovídající původním reálným číslům („ostrá fuzzy čísla“).

Věta 5.3. Je-li A fuzzy číslo a $A(x) = 1$, pak A je neklesající na $(-\infty, x\rangle$ a nerostoucí na $\langle x, +\infty)$.

Rozmyslete si, jak modifikovat větu 5.3 pro A fuzzy interval.

Definice 5.4. Fuzzy číslo *opačné* k fuzzy číslu A je množina $-A$ definovaná vztahem

$$(-A)(x) = A(-x)$$

Fuzzy číslo opačné je definováno podle principu rozšíření binárních relací uplatněnému na unární minus, viz příklad 4.8. Speciálně pro všechna $\alpha \in \langle 0,1\rangle$ je

$$R_{-A}(\alpha) = -R_A(\alpha).$$

5.2. Binární operace s fuzzy čísly

Nyní rozšíříme binární operace $+, -, \cdot, :$ z reálných čísel na fuzzy intervaly. Použijeme k tomu princip rozšíření. Je však třeba jej kombinovat s další konstrukcí, totiž s cylindrickým rozšířením. Tento obrat je v mnohých knihách přehlížen, proto se tomuto kroku budeme věnovat podrobněji.

Chceme rozšířit binární aritmetickou operaci $\square \in \{+, -, \cdot, :\}$. Jelikož $\square : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, můžeme na $\square$ pohlížet též jako na relaci, konkrétně jako na podmnožinu $\mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}$. Tu můžeme podle již zavedeného principu rozšíření pro *binární relace* rozšířit na operaci $\mathcal{F}(\mathbf{R}^2) \to \mathcal{F}(\mathbf{R})$ (definice 4.6). Tu potřebujeme ještě složit se zobrazením $\mathcal{F}(\mathbf{R}) \times \mathcal{F}(\mathbf{R}) \to \mathcal{F}(\mathbf{R}^2)$, které získáme z cylindrického rozšíření (definice 3.19). Tím dostáváme potřebnou binární operaci nad fuzzy čísly $\circledcirc : \mathcal{F}(\mathbf{R}) \times \mathcal{F}(\mathbf{R}) \to \mathcal{F}(\mathbf{R})$.

Pro odlišení používáme pro rozšířenou operaci jiný symbol, tj. původní operace na reálných číslech je $\square$ a rozšířená operace na fuzzy číslech je $\circledcirc$. Konkrétněji, rozšíření aritmetických operací $+, -, \cdot$ budeme zapisovat takto: $\oplus, \ominus, \odot, \odot$.

Popsanou ideu rozšíření binární operace na fuzzy čísla upřesníme v následující definici:

Definice 5.5. Nechť A, B jsou fuzzy intervaly, $\square \in \{+, -, \cdot, :\}$. Pak $A \circledcirc B$ je fuzzy množina definovaná předpisem

$$(A \circledcirc B)(x) = \sup\bigl\{\min\bigl(A(y), B(z)\bigr) :\ y, z \in \mathbf{R}, y \square z = x\bigr\} = \overset{S}{\bigvee_{y}} \overset{S}{\bigvee_{z,\, y \square z = x}} A(y) \underset{S}{\wedge} B(z).$$

Uplatníme-li tuto definici na ostré intervaly, dostaneme tzv. *intervalovou aritmetiku.* Viz následující příklad.

Příklad 5.6. Uvažujme ostré intervaly $\langle a, b\rangle$, $\langle c, d\rangle$. Pak platí

$$
\begin{aligned}
\langle a, b\rangle \oplus \langle c, d\rangle &= \langle a + c, b + d\rangle,\\
\langle a, b\rangle \ominus \langle c, d\rangle &= \langle a - d, b - c\rangle,\\
\langle a, b\rangle \odot \langle c, d\rangle &= \big\langle \min(ac, ad, bc, bd), \max(ac, ad, bc, bd)\big\rangle,\\
\langle a, b\rangle \oslash \langle c, d\rangle &= \big\langle \min(a/c, a/d, b/c, b/d), \max(a/c, a/d, b/c, b/d)\big\rangle.
\end{aligned}
$$

Poslední rovnost platí pouze tehdy, když $0 \notin \langle c, d\rangle$. V opačném případě výsledkem není interval.

Právě popsaná intervalová aritmetika nám umožní výpočet binárních operací s fuzzy intervaly převedením do horizontální reprezentace, neboť platí tato věta:

Věta 5.7. Pro libovolné fuzzy intervaly A, B a $\alpha \in \langle 0, 1\rangle$ platí

$$R_{A \circledcirc B}(\alpha) = R_A(\alpha) \circledcirc R_B(\alpha).$$

Poznámka 5.8. Výsledek násobení $A \odot A$ nemusí být nezáporný, tj. může nabývat nenulových stupňů příslušnosti i pro záporná čísla, pokud $\operatorname{Supp} A$ obsahuje záporná i kladná čísla. Tím se tato operace liší od unární A^2 popsané v příkladu 4.8.

Věta 5.9. Součet, rozdíl a součin fuzzy čísel (resp. intervalů) je fuzzy číslo (resp. interval).

Dělení fuzzy čísel a intervalů se zavádí odlišně, abychom se vyhnuli problémům s dělením nulou:

$$
\begin{aligned}
(A \oslash B)(x) &= \sup\big\{\min\big(A(y), B(z)\big) : y, z \in \mathbf{R}, y = z \cdot x\big\} =\\
&= \bigvee^{S}_{y} \bigvee^{S}_{z,\, y = z\cdot x} A(y) \mathbin{\underset{S}{\wedge}} B(z) = \bigvee^{S}_{z} A(z \cdot x) \mathbin{\underset{S}{\wedge}} B(z).
\end{aligned}
$$

Podle tohoto vzorce lze dělit i „nulou“. Je-li $B = \{0\}$, pak $(A \oslash B)(x) = A(0)$, což je konstantní fuzzy množina.

I při dělení jinými fuzzy intervaly, obsahujícími nulu (s nenulovým stupněm příslušnosti) vycházejí fuzzy množiny, které nejsou fuzzy intervaly. Jejich nosič je neomezený a řezy nemusí být konvexní.

Věta 5.10 (vlastnosti operací s fuzzy čísly). Pro fuzzy čísla A, B, C platí

$$
\begin{aligned}
\{0\} \oplus A &= A, & \{0\} \odot A &= \{0\}, \qquad \{1\} \odot A = A,\\
A \oplus B &= B \oplus A, & A \odot B &= B \odot A,\\
A \oplus (B \oplus C) &= (A \oplus B) \oplus C, & A \odot (B \odot C) &= (A \odot B) \odot C,\\
A \oplus (-B) &= A \ominus B, & (-A) \odot B &= -(A \odot B) = A \odot (-B),\\
-(-A) &= A,\\
A \oslash B &= A \odot (\{1\} \oslash B), \quad \text{je-li pravá strana fuzzy interval}\\
A \odot (B \oplus C) &\le (A \odot B) \oplus (A \odot C) \quad \text{(nemusí platit rovnost)}
\end{aligned}
$$

Pokud je v posledním vztahu A ostré číslo ($A = \{x\}$), pak nastává rovnost.

Poznámka 5.11. Následující vztahy *nemusí* platit pro fuzzy čísla:

$$
\begin{aligned}
A \ominus A &= \{0\},\\
(A \oplus B) \ominus B &= A,\\
A \oslash A &= \{1\},\\
(A \oslash B) \odot B &= A,\\
A \odot (B \oplus C) &= A \odot B \oplus A \odot C.
\end{aligned}
$$

Rejstřík